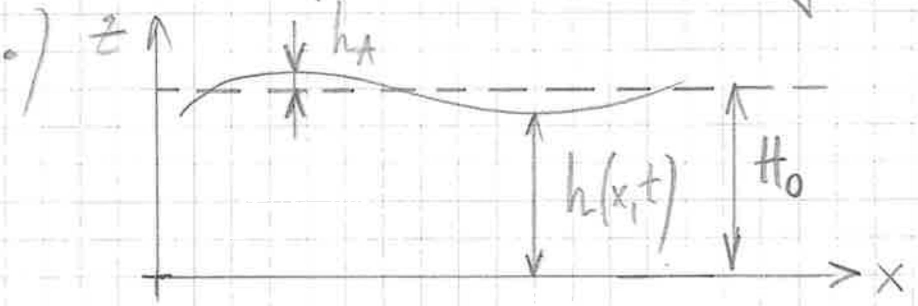
Herleitung der 1D-Flachwasser-gleichungen

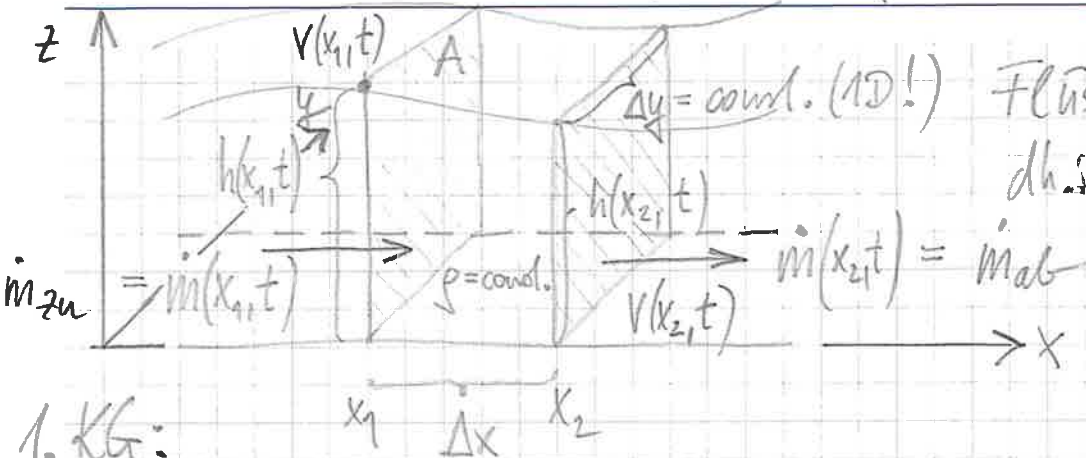
Voraussetzungen bzw. Annahmen:

- Flüssigkeit ohne innere Reibung
- Betrachtung eines Wasserlaufes mit konst. Breite Δy (sonst nicht 1D)
- Dichte der Flüssigkeit $\rho = \text{konst.}$ (inkompressibel)
- Vertikalgeschw. der Flüssigkeit $v_V = 0$ ... ist näherungsweise korrekt, wenn Wellenlänge $\lambda \gg h$, da Oberfl. nur sehr langsam steigt & sinkt.
- 

Amplitude $h_A \ll H_0$

Unter diesen Voraussetzungen werden im Folgenden die Kontinuitätsgleichung (KG) und die Impulsgleichung (IG) hergeleitet.

Flachwassergleichungen (1D)



Flüssigkeit inkompr., dh. $\rho = const.$

1. KG:

Im $[t_1;t_2]$: $\Delta m = \int_{t_1}^{t_2} (dm_{zu} - dm_{ab})$

mit $\dot m_{zu} = \dot m(x_1,t) = \rho \cdot \underbrace{h(x_1,t)\cdot\Delta y}_{=A(x_1,t)} \cdot v(x_1,t)$

$dm_{zu} = \rho\cdot h(x_1,t)\cdot \Delta y \cdot v(x_1,t)\cdot dt$

und analog $dm_{ab} = \rho \cdot h(x_2,t)\cdot\Delta y\cdot v(x_2,t)\cdot dt$

$\Rightarrow \Delta m = \int_{t_1}^{t_2} \rho\cdot\Delta y \left(h(x_1,t)v(x_1,t) - h(x_2,t)v(x_2,t)\right) dt$

Im $[x_1;x_2]$: $\Delta m = \int_{x_1}^{x_2}\rho\cdot\left(h(x,t_2)-h(x,t_1)\right)\cdot\Delta y\cdot dx$

$\rightarrow$ "$\Leftrightarrow$" $\int_{x_1}^{x_2} \cancel{\rho} \underbrace{\left(h(x,t_2)-h(x,t_1)\right)}_{=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}dt} \cancel{\Delta y}\, dx = -\int_{t_1}^{t_2}\cancel{\rho}\,\cancel{\Delta y} \underbrace{\left(h(x_2,t)v(x_2,t)-h(x_1,t)v(x_1,t)\right)}_{=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial (h(x,t)v(x,t))}{\partial x}dx} dt$

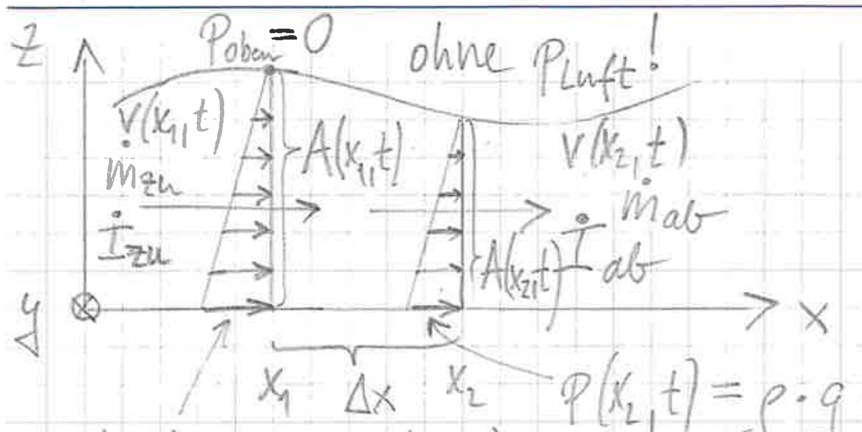
mit HS d. Diff- & Int-Rechg.:

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (h(x,t)v(x,t))}{\partial x}\, dt\, dx = 0$$

$$\forall [t_1,t_2] \wedge \forall [x_1,x_2] \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (h\cdot v)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

2. IG:

Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:



I ... Impuls

$A(x_1,t) = h(x_1,t) \cdot \Delta y$

$A(x_2,t) = h(x_2,t) \cdot \Delta y$

$p(x_2,t) = \rho \cdot g \cdot h(x_2,t)$ ... hydrostat. Druck

$p(x_1,t) = \rho \cdot g \cdot h(x_1,t) = p_{unten}$

$$\underbrace{\dot{I}_{zu}}_{„= F_{zu}"} = \dot{m}_{zu}\, v(x_1,t) + \bar{p}(x_1,t) \cdot A(x_1,t)$$

$\bar{p}$ = mittlerer Druck, der auf $A(x_1,t)$ wirkt

$p_{oben} = 0$ (ohne p_{Luft}) & $p_{unten} = \rho g h(x_1,t) \Longrightarrow \bar{p} = \frac{p_{oben} + p_{unten}}{2}$, da p linear ansteigt

$$\Longrightarrow \bar{p}(x_1,t) = \frac{\rho g h(x_1,t)}{2}$$

$$\dot{I}_{zu} = \rho \cdot \underbrace{h(x_1,t) \cdot \Delta y}_{= A(x_1,t)} \cdot v^2(x_1,t) + \frac{1}{2}\rho g h^2(x_1,t) \cdot \Delta y$$

$$d\dot{I}_{zu} = \rho \Delta y \left(h(x_1,t) \cdot v^2(x_1,t) + \frac{1}{2} g h^2(x_1,t) \right) dt$$

analog: $d\dot{I}_{ab} = \rho \Delta y \left(h(x_2,t) \cdot v^2(x_2,t) + \frac{1}{2} g h^2(x_2,t) \right) dt$

Im $[t_1, t_2]$: $\Delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(d\dot{I}_{zu} - d\dot{I}_{ab} \right) =$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \rho \Delta y \left[h(x_1,t) v^2(x_1,t) + \frac{1}{2} g h^2(x_1,t) - \left(h(x_2,t) v^2(x_2,t) + \frac{1}{2} g h^2(x_2,t) \right) \right] \cdot dt$$

Im $[x_1, x_2]$: während $[t_1, t_2]$

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho h(x,t_2)\Delta y\, v(x,t_2) - \rho h(x,t_1)\Delta y\, v(x,t_1)\right) dx$$

$$\rightarrow \rho \Delta y \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left(h(x,t_2)v(x,t_2) - h(x,t_1)v(x,t_1)\right)}_{= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial (h(x,t)v(x,t))}{\partial t} dt} dx =$$

$$= -\rho \Delta y \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(h(x_2,t)v^2(x_2,t) + \tfrac{1}{2} g h^2(x_2,t) - h(x_1,t)v^2(x_1,t) + \tfrac{1}{2} g h^2(x_1,t)\right)}_{= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x,t)v^2(x,t) + \frac{1}{2} g h^2(x,t)\right) dx} dt$$

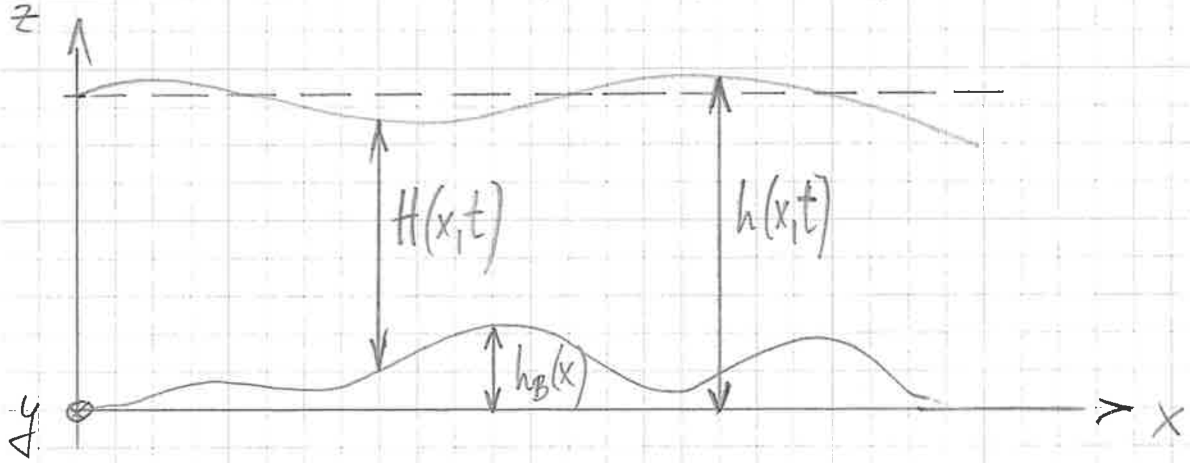
$$\Longrightarrow \rho \Delta y \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(h(x,t)v(x,t)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x,t)v^2(x,t) + \tfrac{1}{2} g h^2(x,t)\right)\right] dx\, dt = 0$$

$$\forall [x_1, x_2] \;\&\; [t_1, t_2] \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial t}(h \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h \cdot v^2 + \tfrac{1}{2} g h^2\right) = 0}} \quad (2)$$

Lösung von (1) & (2) inkl. passenden AB & RB

Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:

Modellerweiterung, wenn der Boden des Wasserlaufes nicht eben ist



$$\Longrightarrow \quad h(x,t) = H(x,t) + h_B(x)$$

h_B ... Bodenfkt (muss bekannt sein)

Weiters gilt für Glg (2):

$$\frac{\partial h}{\partial t} v + h \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot v^2 + h \cdot 2v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\cancel{2}} g \cancel{2} h \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$v \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot v + h \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{=0,\ \text{gemäß } (1)} + \cancel{h} \frac{\partial v}{\partial t} + \cancel{h} \cdot \underbrace{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}_{= \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x}} + g \cdot \cancel{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0}} \qquad (3)$$

vereinfachte Form der IG

Lösung von (1) & (3) mit passenden AB & RB