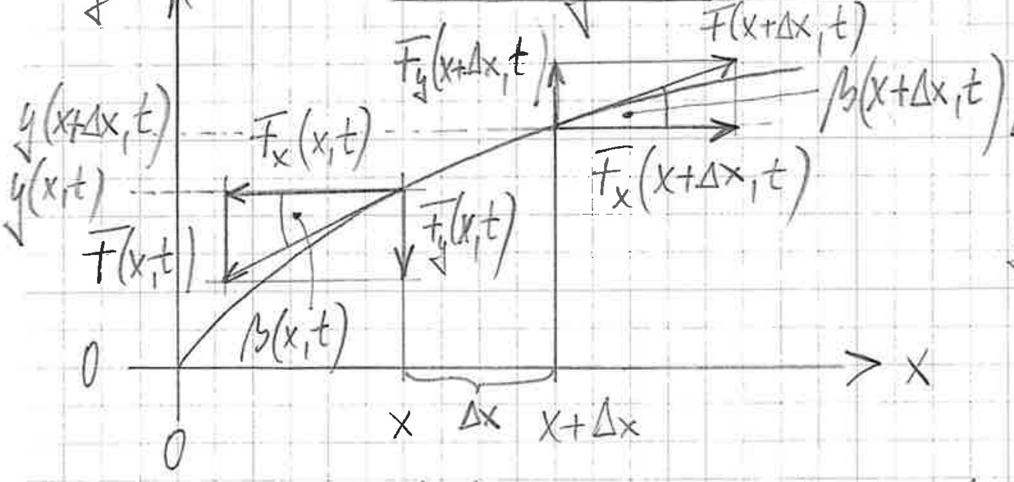
Schwingende Saite



$\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta x$

$y = y(x,t)$

Newton II: $\Delta m \, \ddot{y}(x_S,t) = F_y(x+\Delta x,t) - F_y(x,t)$ $\quad x_S$: S... Schwerpunkt

$$\rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \ddot{y}(x_S,t) = F(x+\Delta x,t) \cdot \sin(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t) \cdot \sin(\beta(x,t)) \quad \Big| :\Delta x \; \Big| \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$\rho A \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \ddot{y}(x_S,t)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x,t) \cdot \sin(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t) \cdot \sin(\beta(x,t))}{\Delta x}$$

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t) \cdot \sin \beta(x,t)\right) \qquad (1)$$

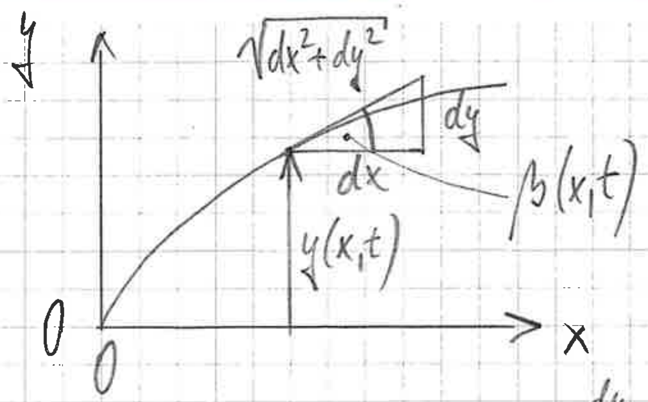
ODER:

$$\rho \cdot A \cdot \cancel{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \, dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t) \cdot \sin(\beta(x,t))\right) dx$$

$$\Rightarrow \int_x^{x+\Delta x} \left[\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t) \cdot \sin(\beta(x,t))\right)\right] dx = 0$$

$$\forall \, [x, x+\Delta x] \Rightarrow \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t) \cdot \sin(\beta(x,t))\right) = 0$$

siehe (1)



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\ldots) = (\ldots)' \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\ldots) = (\dot{\ldots})}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\frac{dx}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$(1) \Longrightarrow \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \qquad (2)$$

<u>Materialgesetz:</u> $F = F_0 + EA \cdot \varepsilon$

- ε – Dehnung der Saite
- EA – E-Modul
- F_0 – Zugkraft in der Ruhelage

mit $\varepsilon = \dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{\text{Längenänderung}}{\text{„Ruhelänge"}}$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2} - dx}{dx} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{dx}{dx}}{\frac{dx}{dx}} = \sqrt{1+y'^2} - 1$$

$$(2) \Longrightarrow \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(F_0 + EA\cdot\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)\right)\cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \qquad (3)$$

allgem. Form der Wellengleichung für eine schwingende Saite

Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]: Vereinfachungen

Wenn in x-Richtung keine Verschiebungen auftreten gilt Newton I:

$$\sum F_x = 0 = F(x+\Delta x)\cos(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t)\cdot\cos(\beta(x,t)) \quad \Big|\cdot\Delta x$$

$$0 = \frac{F(x+\Delta x)\cdot\cos(\beta(x+\Delta x)) - F(x,t)\cos(\beta(x,t))}{\Delta x} \quad \Big| \lim_{\Delta x\to 0}$$

$$0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,t)\cos(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t)\cos(\beta(x,t))}{\Delta x}$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t)\cdot\cos(\beta(x,t))\right) = 0}$$

ODER:

$$\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t)\cos(\beta(x,t))\right)dx = 0$$

$$\forall\,[x, x+\Delta x]: \quad \underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t)\cdot\cos(\beta(x,t))\right) = 0}$$

bzw. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

inkl. Materialgesetz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_0 + EA\cdot\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

als zusätzliche Bedingung (4)

Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:

$$(3) \Longrightarrow \quad \rho A \ddot{y} = \Bigg(\overbrace{\frac{F_0 + EA\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)}{\sqrt{1+y'^2}}}^{=u} \cdot \overbrace{y'}^{=v}\Bigg)'$$

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

$$\rho A \ddot{y} = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{F_0 + EA\cdot\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)}{\sqrt{1+y'^2}}\right)'}_{=0 \text{ laut } (4)} \cdot y'}_{=0} + \frac{F_0 + EA\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot y''$$

$$\Longrightarrow \rho A \ddot{y} = \frac{F_0 + EA\left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)}{\sqrt{1+y'^2}}\, y''$$

Wellengleichung für eine Saite ohne seitl. Verschiebungen

vollst. Linearisierung: wenn $y' \downarrow \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} \approx 1$

$$\Longrightarrow \rho A \ddot{y} = \frac{F_0 + EA\overbrace{(1-1)}^{=0}}{1}\, y''$$

$$\rho A \ddot{y} = F_0\, y'' \quad \Big| : (\rho A)$$

$$\ddot{y} = \frac{F_0}{\rho A}\, y'' \quad \text{mit Spannung } \sigma = \frac{F_0}{A}$$

$$\ddot{y} = \frac{\sigma}{\rho}\, y''$$

„Standardform" der linearen Form der Wellengleichung

NE Österreich GmbH | Brockhaus
Jakob-Haringer-Str. 3, 5020 Salzburg
Web: www.brockhaus.at
E-Mail: service@brockhaus.at
Facebook: facebook.com/Brockhaus.at
Twitter: twitter.com/Brockhaus_at