

Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung

Schrödinger Gleichung (1D): $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$
(nicht relativistisch)

relativistische E-p-Beziehung: $E_{\text{ges}}^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$
 $\hat{H} = \hat{E}_{\text{ges}}$

Impulsoperator (1D): $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$\rightarrow \hat{E}_{\text{ges}} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$

mit $\hat{E}_{\text{ges}} = \sqrt{\hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \sqrt{\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

$\Rightarrow \sqrt{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} c^2 + m_0^2 c^4} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$

$\left(-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m_0^2 c^4\right) \psi^2 = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi^2$

$\left(-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m_0^2 c^4\right) \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \psi$

Bemerkung: Mit $m_0 = 0$ folgt aus der Klein-Gordon-Gleichung die klassische Wellengleichung.

Mit $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = (\dots)'$ & $\frac{\partial}{\partial x}(\dots) = (\dots)''$:

$$\ddot{\psi} = c^2 \psi'' - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \psi$$