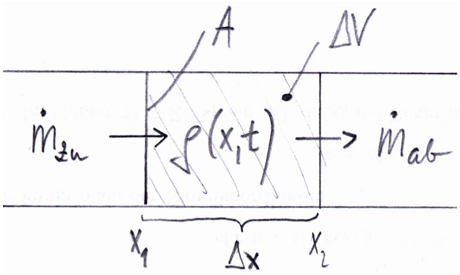
Die Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung für einen Massestrom beschreibt den Zusammenhang zwischen der zeitlich und räumlich veränderlichen Dichte ρ und der zeitlich und räumlich veränderlichen Geschwindigkeit v. Es handelt sich hierbei um eine Erhaltungsgleichung für die Masse m in Form einer partiellen Differentialgleichung[1].

Wir beschränken die Herleitung der mathematischen Einfachheit wegen auf eine Dimension und betrachten ein Fluid mit der veränderlichen Dichte $\rho = \rho(x,t)$, welches mit der Geschwindigkeit $v = v(x,t)$ durch ein Rohr mit der konstanten Querschnittsfläche A strömt (siehe Skizze).



Im Folgenden werden wir die Massebilanz für das Kontrollvolumen $\Delta V = A\,\Delta x$ (mit $\Delta x = x_2 - x_1$) aufstellen.

Während des infinitesimal kleinen Zeitintervalls dt wird durch die Grenzfläche A an der Stelle x_1 die Masse

$$dm_{zu} = \rho(x_1,t)\,A\,v(x_1,t)\,dt \tag{1}$$

zu- und durch die Grenzfläche A an der Stelle x_2 die Masse

$$dm_{ab} = \rho(x_2,t)\,A\,v(x_2,t)\,dt \tag{2}$$

abgeführt. Daraus ergeben sich die Massenströme (siehe Abbildung)

$$\dot{m}_{zu} = \frac{dm_{zu}}{dt} = \rho(x_1,t)\,A\,v(x_1,t), \tag{3a}$$

$$\dot{m}_{ab} = \frac{dm_{ab}}{dt} = \rho(x_2,t)\,A\,v(x_2,t). \tag{3b}$$

Die Massenänderung in einem infinitesimal kleinen Volumen $dV = A\,dx$ beträgt im Zeitintervall $[t_1,t_2]$

$$dm = (\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1))\,A\,dx \tag{4}$$

Die Gesamtmassenänderung Δm im Kontrollvolumen ΔV während des Zeitintervalls $[t_1,t_2]$ erhalten wir einerseits durch die räumliche Integration von (4)

$$\Delta m = \int_{x_1}^{x_2} dm = \int_{x_1}^{x_2} (\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1))\,A\,dx, \tag{5}$$

und andererseits durch das zeitliche Integral der Bilanz „Zufluss − Abfluss“

$$\Delta m = \int_{t_1}^{t_2} (dm_{zu} - dm_{ab}) = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{m}_{zu} - \dot{m}_{ab})\,dt \tag{6a}$$

$$\overset{(3)}{=} \int_{t_1}^{t_2} A\,(\rho(x_1,t)\,v(x_1,t) - \rho(x_2,t)\,v(x_2,t))\,dt. \tag{6b}$$

[1] Die Kontinuitätsgleichung spielt in allen Feldtheorien eine wichtige Rolle. Weitere Beispiele für Erhaltungsgrößen sind u.a. die Ladung und die Energie.

Durch Gleichsetzen von (5) und (6) erhält man die Kontinuitätsgleichung in ihrer Integraldarstellung

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1))\, A\, dx = \int_{t_1}^{t_2} A\, (\rho(x_1,t)\, v(x_1,t) - \rho(x_2,t)\, v(x_2,t))\, dt. \tag{7}$$

Da das Lösen von Integralgleichungen beim praktischen Rechnen aufgrund der erhöhten Komplexität soweit es geht vermieden wird, wandelt man diese Gleichung mit Hilfe der Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung[2] in eine (partielle) Differentialgleichung um. Es gilt somit

$$\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\, dt, \tag{8}$$

$$\rho(x_1,t)\, v(x_1,t) - \rho(x_2,t)\, v(x_2,t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho(x,t)\, v(x,t))}{\partial x}\, dx. \tag{9}$$

Durch Einsetzen von (8) und (9) in (7) und Vertauschen der Integrationen gelangt man zu

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} A\, \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\, dt\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} A\, \frac{\partial(\rho(x,t)\, v(x,t))}{\partial x}\, dt\, dx, \tag{10}$$

bzw. nach Umformung zu

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} A \left(\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(x,t)\, v(x,t))}{\partial x} \right) dt\, dx = 0. \tag{11}$$

Da die letzte Gleichung für beliebige Rohrabschnitte $[x_1, x_2]$ und beliebige Zeitintervalle $[t_1, t_2]$ gilt, muss der Integrand

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(x,t)\, v(x,t))}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

Dies ist die Standarddarstellung der Kontinuitätsgleichung für die Massenerhaltung als partielle Differentialgleichung.

Diskussion:

- Da in (12) zwei unbekannte Funktionen (nämlich $\rho(x,t)$ und $v(x,t)$) enthalten sind, kann die Kontinuitätsgleichung isoliert nur gelöst werden, wenn

  1. $v(x,t)$ a priori bekannt ist, oder
  2. $v(x,t)$ als Funktion der Dichte $\rho(x,t)$ dargestellt werden kann, d.h. $v(x,t) = f(\rho(x,t))$ (z.B. bei Verkehrsflussmodellen).

  In beiden Fällen bleibt als unbekannte Funktion nur $\rho(x,t)$.

- Bei praktischen Anwendungen in der Strömungsmechanik wird die Kontinuitätsgleichung gemeinsam mit einer Impuls-, einer Energieerhaltungsgleichung und einem „Materialgesetz“ (z.B. allgem. Gasgleichung) gelöst (siehe z.B. Euler-Gleichungen der Gasdynamik oder Navier-Stokes-Gleichungen).

- Für den Speziafall $\rho = konst.$ vereinfacht sich (12) zu

  $$\rho\, \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0, \text{ bzw. } \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

  Betrachtet man ein beliebiges Kontrollvolumen ΔV, so gilt für die Änderung der Geschwindigkeit

  $$\Delta v = v(x_2,t) - v(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\, dx = 0. \tag{14}$$

  D.h. die Geschwindigkeit ist für beliebige Zeitpunkte t an allen Orten x gleich.

[2] $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, mit F = Stammfunktion von f, d.h. $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

- Ein weiterer Spezialfall von (12) ist die so genannte *lineare Transportgleichung*. Diese erhält man, wenn man $v = konst.$ setzt. Es gilt somit

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

  Die lineare Transportgleichung modelliert die einfachste Form der Ausbreitung mit konstanter Geschwindigkeit. Man erkennt: Jede differenzierbare Funktion $\rho(x,t)$ der Bauform $\rho(x,t) = f(x - v\,t)$ ist Lösung der linearen Transportgleichung.

Aufgaben:

1. Betrachte zur Illustration der Lösung der linearen Transportgleichung in 2D die animierte Grafik `http://www.tutz.ws/Animierte-Grafiken/Transportgleichung-2D.gif`.

2. Kontrolliere mit Hilfe von WxMaxima für eine selbstgewählte geeignete Funktion $f(x - v\,t)$ in 1D, dass diese Funktion die Gleichung (15) erfüllt, und stelle die Lösung in Abhängigkeit von der Zeit animiert dar.