Physikalische Beschreibung von Wasserwellen

Der vorliegende Artikel fasst die Theorie von George Biddell Airy (1801-1892) zur Beschreibung von Wasserwellen, auch bekannt als lineare Wellentheorie, zusammen. Im ersten Abschnitt werden dazu die Eulerschen Gleichungen der Strömungsmechanik für Fluide mit konstanter Dichte hergeleitet. Im zweiten Abschnitt wird darauf basierend die „Bewegungsgleichung“ für die Wellen inkl. der zugehörigen Randbedingungen aufgestellt. Der 3. Abschnitt zeigt die Lösung inkl. Herleitung einer Formel für die Phasengeschwindigkeit der Welle.

1 Herleitung der Eulerschen Gleichungen der Strömungsmechanik

In diesem Abschnitt werden die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung für inkompressible (d.h., Dichte $\rho = const.$) Flüssigkeiten hergeleitet.

1.1 Eulersche Betrachtung der Strömung

Bei der Eulerschen Betrachtung einer Strömung ändert sich die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselements zeitlich und räumlich. Für den Geschwindigkeitsvektor gilt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x(t), y(t), z(t), t) \\ v_y(x(t), y(t), z(t), t) \\ v_z(x(t), y(t), z(t), t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit setzt sich somit aus einem lokalen Anteil aufgrund der Zeitabhängigkeit und einem konvektiven Anteil aufgrund der Ortsabhängigkeit zusammen. Dies ist im Hinblick auf die Herleitung der Impulsgleichung wichtig. Zur besseren Lesbarkeit wird verkürzt x, y, z statt $x(t), y(t), z(t)$ geschrieben.

1.2 Kontinuitätsgleichung

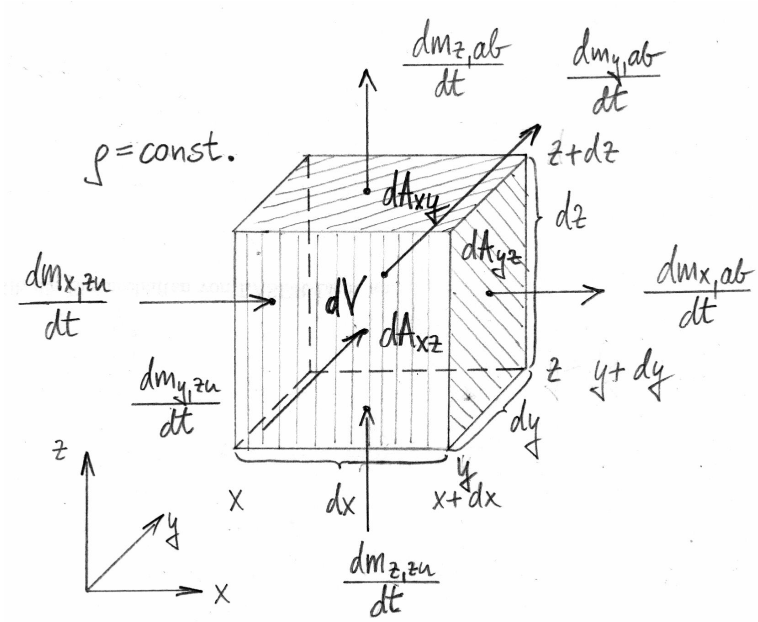
Man betrachte das infinitesimale Volumenelement (siehe Skizze 1), das von einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ durchströmt wird. Für die Massenerhaltung gilt allgemein: Die Änderung der Masse dm im Volumen $dV = dx\,dy\,dz$ während des Zeitraums dt ist gleich „Summe der Zuflüsse − Summe der Abflüsse“. D.h.,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{x,zu}}{dt} - \frac{dm_{x,ab}}{dt} + \frac{dm_{y,zu}}{dt} - \frac{dm_{y,ab}}{dt} + \frac{dm_{z,zu}}{dt} - \frac{dm_{z,ab}}{dt}. \tag{2}$$

Da aufgrund der Inkompressibilität der Flüssigkeit $\rho = const.$ gilt, ist $dm = \rho\, dV$ zeitlich konstant und somit

$$\frac{dm}{dt} = 0. \tag{3}$$

Skizze 1:



Setzt man für die zu- und abfließenden Massenströme ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{dm}{dt} = 0 \quad &= \quad \rho\, dA_{yz}\, v_x(x,y,z,t) - \rho\, dA_{yz}\, v_x(x+dx,y,z,t) \\
&+ \quad \rho\, dA_{xz}\, v_y(x,y,z,t) - \rho\, dA_{xz}\, v_y(x,y+dy,z,t) \\
&+ \quad \rho\, dA_{xy}\, v_z(x,y,z,t) - \rho\, dA_{xy}\, v_z(x,y,z+dz,t),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

bzw. mittels Taylor-Entwicklung

$$
\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \rho\, dA_{yz} \left(v_x(x,y,z,t) - v_x(x,y,z,t) - \frac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial x} dx \right) \\
&+ \quad \rho\, dA_{xz} \left(v_y(x,y,z,t) - v_y(x,y,z,t) - \frac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial y} dy \right) \\
&+ \quad \rho\, dA_{xy} \left(v_z(x,y,z,t) - v_z(x,y,z,t) - \frac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial z} dz \right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

und entsprechender Vereinfachung unter Zuhilfenahme von $dA_{yz} = dy\, dz$, $dA_{xz} = dx\, dz$ und $dA_{xy} = dx\, dy$

$$
\frac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial z} = 0. \tag{6}
$$

Dieses Ergebnis, die so genannte Kontinuitätsgleichung, lässt sich mit Hilfe des Nabla-Operators

$$
\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

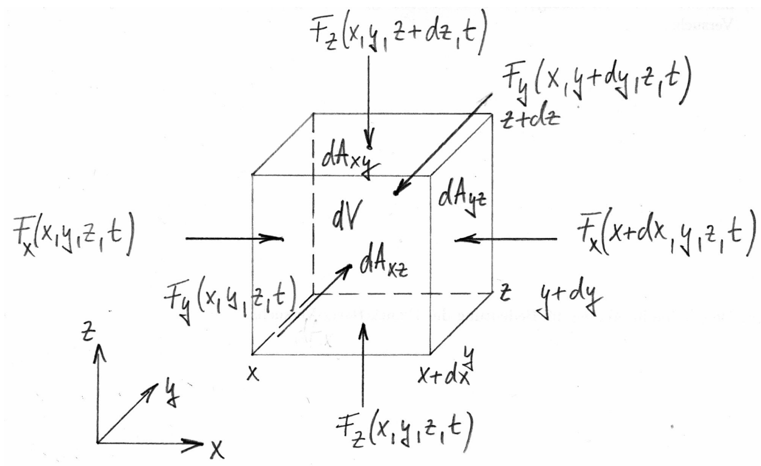
und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ kompakt wie folgt schreiben

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{8}$$

1.3 Impulsgleichung

Man betrachte das inifinitesimal kleine Volumenelement aus Skizze 2.

Skizze 2:



Die x-Komponente kann auf Basis des 2. Newtonschen Gesetzes wie folgt angeschrieben werden

$$dm \frac{dv_x(x,y,z,t)}{dt} = F_x(x,y,z,t) - F_x(x+dx,y,z,t). \tag{9}$$

Wir ersetzen $dm = \rho\, dV = \rho\, dA_{yz}\, dx$ und drücken die Kraft F_x durch den Druck p aus

$$\rho\, dA_{yz}\, dx \frac{dv_x(x,y,z,t)}{dt} = (p(x,y,z,t) - p(x+dx,y,z,t))dA_{yz}. \tag{10}$$

Mittels Taylor-Reihenentwicklung folgt daraus

$$\rho\, dx \frac{dv_x(x,y,z,t)}{dt} = \left(p(x,y,z,t) - p(x,y,z,t) - \frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial x}\, dx \right), \tag{11}$$

was vereinfacht

$$\rho\, \frac{dv_x(x,y,z,t)}{dt} = -\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial x} \tag{12}$$

ergibt.

Mit der Berechnung des totalen Differentials auf der linken Seite erhält man ($p = p(x,y,z,t)$, $v_x = v_x(x(t), y(t), z(t), t)$)

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{13}$$

bzw. eingesetzt für die Geschwindigkeiten $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$, $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ und $v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$ sowie umgeformt

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\, v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\, v_z = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{14}$$

Die Ableitung $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ ist die eingangs erwähnte lokale Beschleunigung und $\frac{\partial v_x}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\, v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\, v_z$ der konvektive Anteil der Gesamtbeschleunigung.

Analog erhält man für die y-Komponente

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\, v_z = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} \tag{15}$$

und die z-Komponente unter Berücksichtigung eines zusätzlichen Terms für die Schwerkraft

$$dm\frac{dv_z}{dt} = F_z(z,t) - F_z(z+dz,t) - dm\, g, \tag{16}$$

bzw.

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\, v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\, v_z = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{17}$$

wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet.

Setzt man die Gleichungen für die einzelnen Komponenten zusammen, erhält man die Impulsgleichung vektoriell

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \vec{g}, \tag{18}$$

mit

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Man achte auf die korrekte Bildung des Vektorgradienten $\nabla \vec{v}$ in (18).

2 „Bewegungsgleichung“ für Wasserwellen

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung für Wasserwellen inkl. Randbedingungen geht man von (8) und (18) aus. Vereinfachend wird angenommen, dass die betrachtete Strömung wirbelfrei ist. D.h.,

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{0}. \tag{20}$$

Daraus folgt, dass das Geschwindigkeitsfeld als Gradient einer Potentialfunktion $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ ausgedrückt werden kann, d.h.,

$$\vec{v} = \nabla \Phi. \tag{21}$$

Setzt man dies in (8) ein, erhält man als „Bewegungsgleichung“ die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = 0. \tag{22}$$

Für die Randbedingungen an der Wasseroberfläche $z = 0$ geht man von der Impulsgleichung (18) aus und setzt darin die Beziehung

$$(\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) \tag{23}$$

ein, welche sich aufgrund der Wirbelfreiheit von $\vec{v}$, d.h. $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ zu

$$(\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) \tag{24}$$

vereinfacht. Für Gleichung (18) erhält man mit (21) und $\vec{g} = \nabla(-zg)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(-zg), \tag{25}$$

bzw.

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} p + zg \right) = 0. \tag{26}$$

Da diese Beziehung für alle Orte (x, y, z) erfüllt sein muss, gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} p + zg = C(t), \tag{27}$$

mit einer Funktion $C(t)$, die nur von der Zeit, aber nicht vom Ort abhängt. Ersetzt man

$$\Phi \to \Phi + \int_0^t C(\tau) d\tau, \tag{28}$$

so kann $C(t) = 0$ gesetzt werden. Diese Transformation ist erlaubt, da das Integral bei der Bildung des Gradienten $\vec{v} = \nabla \Phi$ wegfällt und das Geschwindigkeitsfeld somit nicht verändert wird.

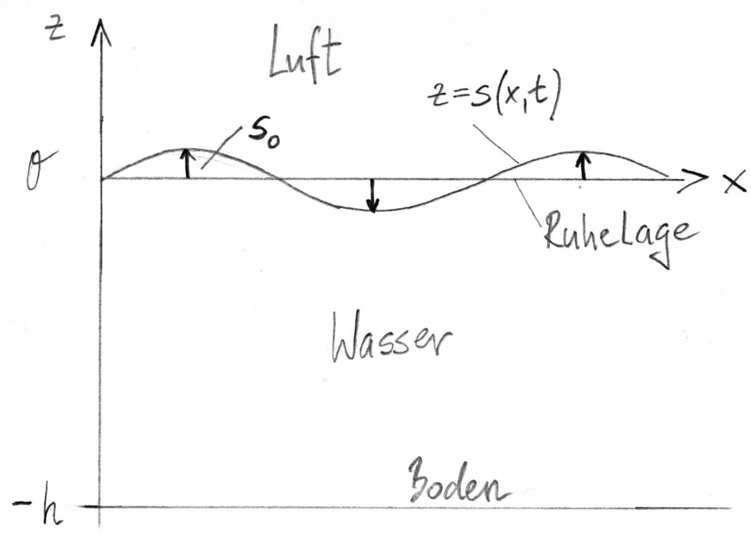
Die resultierende Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} p + zg = 0, \tag{29}$$

ist als Bernoulli-Gleichung bekannt und dient als Ausgangspunkt für die Herleitung der beiden Randbedingungen an der Oberfläche.

Dynamische Randbedingung an der Oberfläche: Wir reduzieren das Problem um eine Dimension und betrachten gemäß Skizze 3 einen Fluss in der x-z-Ebene. Die Form der Oberfläche kann für eine Oberflächenfunktion $z = s(x, t)$ (s für surface) beschrieben werden.

Skizze 3:



Da in (18) der an der Oberfläche $z = s(x,t)$ wirkende Luftdruck $p_L = const.$ durch die Gradientenbildung des Gesamtdrucks p nicht eingeht, kann hier aufgrund der Transformation

$$p \rightarrow p - p_L \tag{30}$$

$p(z = s(x,t)) = 0$ gesetzt werden. Die erste Randbedingung (=dynamische Randbedingung) ist somit die vereinfachte Form von Gleichung (29), nämlich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + sg = 0 \text{ für } z = s(x,t). \tag{31}$$

Kinematische Randbedingung an der Oberfläche: Durch Einfärben der Flüssigkeit an der Oberfläche zeigt sich experimentell, dass Teilchen an der Wasseroberfläche stets dort bleiben. Basierend auf $z = s(x,t) \Leftrightarrow z - s(x,t) = 0$ definieren wir die Funktion

$$F(x,z,t) = z - s(x,t) = 0. \tag{32}$$

Das totale Differential der Funktion lautet

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = 0 &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} && (33)\\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}v_x + \frac{\partial F}{\partial z}v_z, && (34) \end{aligned}$$

wobei für

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(z - s(x,t)) = -\frac{\partial s}{\partial t}, && (35)\\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(z - s(x,t)) = -\frac{\partial s}{\partial x}, && (36)\\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(z - s(x,t)) = 1 && (37) \end{aligned}$$

gelten. Setzt man diese drei Beziehungen in das obige totale Differential ein, erhält man die so genannte kinematische Randbedingung an der Oberfläche $z = s(x,t)$

$$-\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x}v_x + 1\,v_z = 0, \tag{38}$$

bzw. umgeformt und unter Berücksichtigung von $v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ und $v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} v_x &= v_z, & (39)\\
\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} \text{ für } z = s(x,t). & (40)
\end{aligned}
$$

Randbedingung am Boden: Wird der Boden als eben angenommen, $z = -h$, und ist dieser undurchlässig, muss die Strömungsgeschwindigkeit $v_z(-h) = 0$ sein. Da $v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ ist, gilt als 3. Randbedingung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \text{ für } z = -h. \tag{41}$$

3 Lösung der „Bewegungsgleichung“ – Herleitung einer Formel für die Phasengeschwindigkeit

Im vorliegenden Abschnitt wird die Laplace-Gleichung (22) mit den Randbedingungen (31), (40) und (41) für eine fortschreitende Welle gelöst. Ist die Amplitude s_0 der Oberflächenfunktion $s(x,t)$ hinreichend klein, so können die Randbedingungen (31) und (40) gemäß „klein mal klein ist sehr klein“ linearisiert werden. Für (31) folgt somit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + sg = 0 \text{ für } z = s(x,t), \tag{42}$$

für (40) ergibt sich

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial t} \text{ für } z = s(x,t). \tag{43}$$

Aufgrund der Reduktion der Dimensionen auf 2, gilt für die Potentialfunktion (vorerst) $\Phi = \Phi(x,z)$. Folgender Separationsansatz biete sich an

$$\Phi(x,z) = X(x)\,Z(z). \tag{44}$$

Nach zweimaliger Differentiation bezüglich x bzw. z erhält man in (22) eingesetzt

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Z + X\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \tag{45}$$

und umgeformt

$$\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X} = -\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = -\beta^2. \tag{46}$$

Das Vorzeichen der Separationskonstanten β^2 wurde dabei so gewählt, dass sich in x-Richtung periodisches Verhalten ergibt. Die Differentialgleichung hierfür lautet

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \beta^2 X = 0. \tag{47}$$

Mit dem Ansatz $X = e^{\varphi x}$ und somit $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \varphi^2\, e^{\varphi x}$ erhält man eingesetzt und umgeformt $\varphi = \pm\beta\, i$. Setzt man $\beta = \omega\, t - k\, x$ ($\omega\ldots$ Kreisfrequenz, $k\ldots$ Kreiswellenzahl), gelangt man unter Zuhilfenahme der Formel von Euler mit dem Ansatz für eine fortschreitende Welle

$$X = A \sin(\omega\, t - k\, x) + B \cos(\omega\, t - k\, x) \tag{48}$$

und daraus folgend

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -A\, k^2 \sin(\omega\, t - k\, x) - B\, k^2 \cos(\omega\, t - k\, x), \tag{49}$$

zu $\beta = \pm k$.

Die Differentialgleichung in z-Richtung lautet gemäß (46)

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2\, Z = 0. \tag{50}$$

Mit dem Ansatz $Z = e^{\mu z}$ und somit $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \mu^2\, e^{\mu z}$ erhält man eingesetzt und umgeformt $\mu = \pm k$, womit man folgende allgemeine Lösung anschreiben kann

$$Z = C\, e^{kz} + D\, e^{-kz}. \tag{51}$$

Mit der Randbedingung für den Boden (41) kann man die Konstante C bestimmen. Es gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \text{ für } z = -h, \tag{52}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = k \left(C\, e^{kz} - D\, e^{-kz}\right), \tag{53}$$

$$\frac{\partial Z(-h)}{\partial z} = k \left(C\, e^{-kh} - D\, e^{kh}\right) = 0 \Rightarrow C = D\, e^{2kh}. \tag{54}$$

Eingesetzt erhält man

$$Z = D\, e^{2kh}\, e^{kz} + D\, e^{-kz} = D\, e^{kh}\, e^{k(z+h)} + D\, e^{-kz}. \tag{55}$$

Mit der Definition

$$\cosh\left(k(z+h)\right) = \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \Rightarrow e^{k(z+h)} = 2\, \cosh\left(k(z+h)\right) - e^{-k(z+h)}, \tag{56}$$

folgt für

$$Z = D\, e^{kh}\, 2\, \cosh\left(k(z+h)\right) \underbrace{- D\, e^{kh}\, e^{-k(z+h)} + D\, e^{-kz}}_{=0}. \tag{57}$$

Fasst man $D^* = 2\, D\, e^{kh}$ zusammen, ergibt sich folgende Lösung für die z-Komponente

$$Z = D^* \cosh\left(k(z+h)\right). \tag{58}$$

Die Gesamtlösung lautet

$$\Phi = X\, Z = D^* \cosh\left(k(z+h)\right) \left(A \sin(\omega\, t - k\, x) + B \cos(\omega\, t - k\, x)\right). \tag{59}$$

Zur Bestimmung der Phasengeschwindigkeit c der Welle benötigt man die linearisierte dynamische Randbedingung (42) und die linearisierte kinematische Randbedingung (43). Differenziert man (42) nach der Zeit, erhält man

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \text{ für } z = 0. \tag{60}$$

Setzt man darin Beziehung (43) ein, ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ für } z = 0. \tag{61}$$

Leitet man die Lösung (59) getrennt zweimal nach t und einmal nach z ab, und setzt man dies in die letzte Differentialgleichung ein, erhält man mit $A^* = A\,D^*$ und $B^* = B\,D^*$ ausgewertet an der Stelle $z = 0$

$$\left(-\omega^2 \cosh(kh) + kg\sinh(kh)\right)\left(A^* \sin(\omega\,t - k\,x) + B^* \cos(\omega\,t - k\,x)\right) = 0. \tag{62}$$

Diese Identität kann für alle t und alle x nur gelten, wenn

$$-\omega^2 \cosh(kh) + kg\sinh(kh) = 0 \tag{63}$$

ist.

Aus (63) kann man mit $\omega = 2\pi f$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $c = \lambda\,f$ ($f\ldots$ Frequenz und $\lambda\ldots$ Wellenlänge) die Phasengeschwindigkeit

$$c = \pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right)} \tag{64}$$

berechnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\Phi(x = 0, z, t = 0) = 0$ fordern. Damit erhält man aus der Gleichung (59) die Bedingung $B^* = 0$ und somit

$$\Phi = A^* \cosh(k(z+h))\sin(\omega\,t - k\,x). \tag{65}$$

Setzt man diesen Zusammenhang einmal nach t differenziert in (42) ein, gelangt man nach dem Einsetzen von $z = 0$ und entsprechender Umformung zu

$$s(x,t) = -\frac{A^*\,\omega}{g}\cosh(kh)\cos(\omega\,t - k\,x). \tag{66}$$

Substituiert man für die Amplitude der Oberflächenfunktion $s_0 = -\frac{A^*\,\omega}{g}\cosh(kh)$, lautet die vollständige Lösung

$$\begin{aligned} s(x,t) &= s_0 \cos(\omega\,t - k\,x), && (67)\\ \Phi(x,z,t) &= -\frac{s_0\,g}{\omega\,\cosh(kh)}\cosh(k(z+h))\sin(\omega\,t - k\,x), && (68)\end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{v} = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_0\,g\,k}{\omega\,\cosh(kh)}\cosh(k(z+h))\cos(\omega\,t - k\,x) \\ -\frac{s_0\,g\,k}{\omega\,\cosh(kh)}\sinh(k(z+h))\sin(\omega\,t - k\,x) \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Bemerkungen:

- Aufgrund der Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit c von der Wellenlänge λ, siehe (64), zerfließt ein Wellenpaket mit fortlaufender Zeit.
- Im tiefen Wasser mit $h >> \lambda$ und somit $\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right) \approx 1$ vereinfacht sich (64) zu

  $$c = \pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{70}$$

  Auch für diese Wellen ist c abhängig von λ.
- Für Flachwasserwellen gelangt man mit der Annahme $\lambda >> h$ und der Taylor-Entwicklung $\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right) \approx \frac{2\pi}{\lambda}h$ ausgehend von (64) zum bekannten Ergebnis

  $$c = \pm\sqrt{gh}. \tag{71}$$

  Dieses kann auch direkt aus den eindimensionalen Flachwassergleichungen hergeleitet werden.