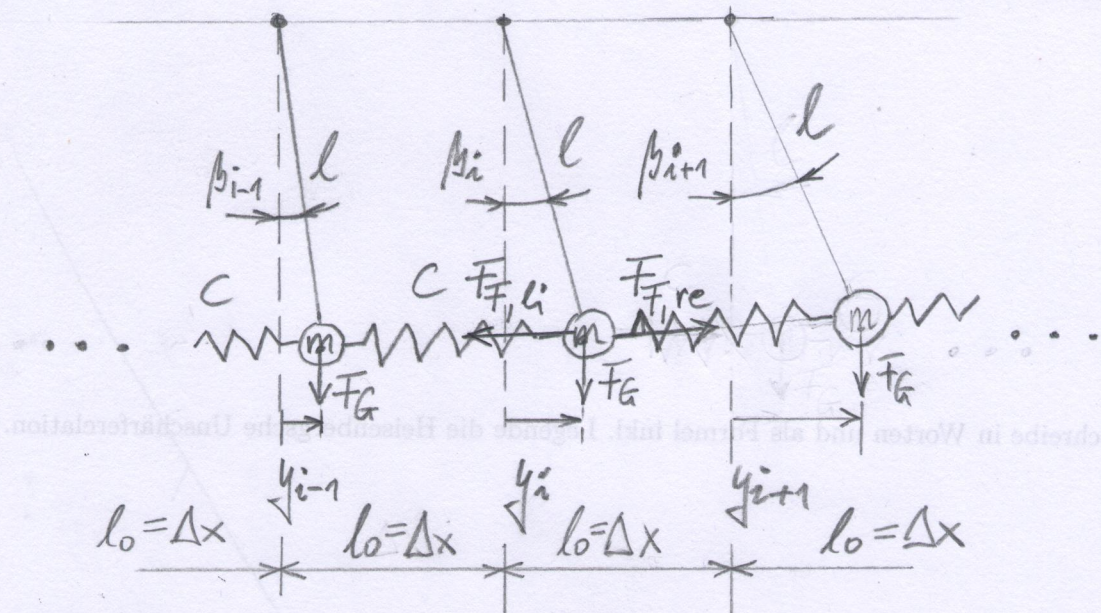


Zusammenhang zw. Pendelkette & Klein-Gordon-Gleichung



$$\sin \beta_i = \frac{y_i}{l} \Rightarrow y_i = l \cdot \sin \beta_i$$

Newton II für Rot: $I \cdot \ddot{\beta} = \sum M$ mit $I = m \cdot l^2$

$$\Rightarrow I \ddot{\beta}_i = -F_G \cdot l \cdot \sin \beta_i + F_{T,i+1} \cdot l - F_{T,i} \cdot l$$

$$m l^2 \ddot{\beta}_i = -m g l \sin \beta_i + C (y_{i+1} - y_i) \cdot l - C (y_i - y_{i-1}) \cdot l$$

$$\ddot{\beta}_i = -\frac{g}{l} \cdot \sin \beta_i + \frac{C}{m \cdot l} (y_{i+1} - y_i + y_{i-1}) \leftarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\beta}_i = -\frac{g}{l} \cdot \sin \beta_i + \frac{C}{m \cdot l} \cdot (l \cdot \sin \beta_{i+1} - l \cdot \sin \beta_i + l \cdot \sin \beta_{i-1})$$

$$\beta_i \ll \Rightarrow \sin \beta_i \approx \beta_i$$

$$\Rightarrow \ddot{\beta}_i = -\frac{g}{l} \beta_i + \frac{C}{m} (\beta_{i+1} - \beta_i + \beta_{i-1}) \dots \text{Bewegungsgleichung für das } i\text{-te Pendel}$$

$\omega_0^2 \dots$ Kreisfrequenz
der Pendel ohne Kopplungen

Übergang $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} : \text{d.h. } \beta_i(t) \rightarrow \beta(x, t)$

$$\ddot{\beta}(x, t) = -\omega_0^2 \beta(x, t) + \frac{\frac{EA}{\Delta x}}{\rho \cdot A \cdot \Delta x} \cdot (\beta(x+\Delta x, t) - 2\beta(x, t) + \beta(x-\Delta x, t)),$$

da $C = \frac{EA}{l_0} = \frac{EA}{\Delta x}$ & $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot \Delta x$

$$\ddot{\beta} = -\omega_0^2 \beta + \frac{E}{\rho} \frac{\beta(x+\Delta x, t) - 2\beta(x, t) + \beta(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \right.$$

$$\ddot{\beta} = -\omega_0^2 \beta + \frac{E}{\rho} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\beta(x+\Delta x, t) - 2\beta(x, t) + \beta(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{E}{\rho} \beta'' - \omega_0^2 \beta \quad \dots \text{Klein-Gordon-Gleichung}$$

Beschreibt eine longitudinal schwingende Saite,
die zusätzlich auf Seilen aufgehängt ist.