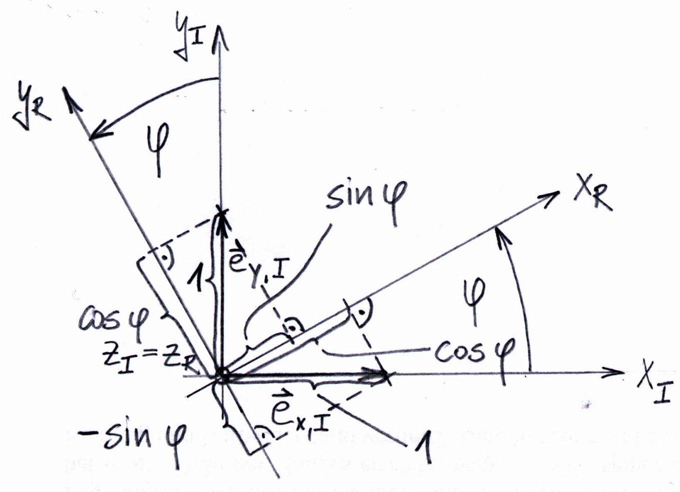
Rotierende Bezugssysteme

Der vorliegende Text soll anhand eines leicht verständlichen Spezialfalles (Drehung um die z-Achse) die bekannten Formeln zur Beschreibung rotierender Bezugsysteme herleiten. Im Zuge dessen gelangen wir zu den Formeln für die Coriolis-, Euler- und Zentrifugalbeschleunigung bzw. -kraft.

Wir betrachten zwei zueinander rotierende Bezugssysteme I und R, wobei die Rotation um die z-Achse erfolgt (siehe Skizze), d.h. $z = z_I = z_R$. Der Winkel φ sei eine beliebige Funktion der Zeit $t \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$.



Gemäß der Abbildung gilt für die Einheitsvektoren im Inertialsystem I

$$\vec{e}_{x,I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_{y,I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_{z,I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Drückt man diese bezüglich des rotierenden Koordinatensystems R aus, erhält man

$$\vec{e}_{x,R} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_{y,R} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_{z,R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Drehmatrix M ergibt sich durch spaltenweises Zusammensetzen der Einheitsvektoren

$$M = \begin{pmatrix} \vec{e}_{x,R} & \vec{e}_{y,R} & \vec{e}_{z,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Der in der Drehachse liegende Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ und seine Ableitung nach der Zeit t ($\frac{d}{dt}() = \dot{()}$), also der zugehörige Winkelbeschleunigungsvektor $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$ lauten (mit $\omega = \dot{\varphi}$ und $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$)

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \text{ bzw.} \tag{4}$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Betrachtet man die Bahn eines Massepunktes P, so kann sein Ort mit $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$ wie folgt beschrieben werden[1]

$$\vec{r}_I = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{6}$$

[1] Man beachte: Da die Koordinatenursprünge von I und R zusammenfallen, existiert für den Punkt P nur *ein* Ortsvektor $\vec{r}$ (ohne Indizierung). Die Indizes I und R in $\vec{r}_I$ bzw. $\vec{r}_R$ drücken somit aus, in welcher Basis $\vec{r}$ dargestellt wird.

Für die Bahngeschwindigkeit und -beschleunigung gelten in I somit

$$\vec{v}_I = \dot{\vec{r}}_I = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a}_I = \ddot{\vec{r}}_I = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Im Folgenden werden der Ortsvektor $\vec{r}_I$, die zugehörige Geschwindigkeit $\vec{v}_I$ und die Beschleunigung $\vec{a}_I$ durch das Koordinatensystem R ausgedrückt. Der Ortsvektor kann mittels der Drehmatrix (3) wie folgt berechnet werden

$$\vec{r}_R = M \cdot \vec{r}_I = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \\ z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Für die Ableitungen des Ortsvektors gilt

$$\vec{v}_R = M \cdot \vec{v}_I = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos(\varphi) + \dot{y}\sin(\varphi) \\ -\dot{x}\sin(\varphi) + \dot{y}\cos(\varphi) \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{9}$$

bzw.

$$\vec{a}_R = M \cdot \vec{a}_I = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}\cos(\varphi) + \ddot{y}\sin(\varphi) \\ -\ddot{x}\sin(\varphi) + \ddot{y}\cos(\varphi) \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Differenziert man den Ausdruck (8) unter Zuhilfenahme der Produkt- und der Kettenregel einmal nach der Zeit t und ordnet man die Terme, erhält man die Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}}_R = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}\cos(\varphi) + \dot{y}\sin(\varphi) \\ -\dot{x}\sin(\varphi) + \dot{y}\cos(\varphi) \\ \dot{z} \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_R \text{ gemäß (9)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\varphi}(-x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi)) \\ \dot{\varphi}(-x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=-\vec{\omega}\times\vec{r}_R \text{ gemäß (4) und (8)}} = \vec{v}_R - \vec{\omega} \times \vec{r}_R. \tag{11}$$

Differenziert man den letzten Ausdruck noch einmal nach der Zeit t, kann man durch Ordnen der Terme die Beschleunigung wie folgt anschreiben

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_R &= \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}\cos(\varphi) + \ddot{y}\sin(\varphi) \\ -\ddot{x}\sin(\varphi) + \ddot{y}\cos(\varphi) \\ \ddot{z} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}_R \text{ gemäß (10)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2\dot{\varphi}[\dot{x}\sin(\varphi) - \dot{y}\cos(\varphi) + \dot{\varphi}(x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi))] \\ -2\dot{\varphi}[\dot{x}\cos(\varphi) + \dot{y}\sin(\varphi) - \dot{\varphi}(x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi))] \\ 0 \end{pmatrix}}_{=-2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_R \text{ gemäß (4) und (11)}} && \text{(12a)} \\
&+ \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}(-x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi)) \\ \ddot{\varphi}(-x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=-\vec{\alpha}\times\vec{r}_R \text{ gemäß (5) und (8)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\varphi}^2(x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi)) \\ \dot{\varphi}^2(-x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_R) \text{ gemäß (4) und (8)}} && \text{(12b)} \\
&= \vec{a}_R \underbrace{-2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_R}_{=\vec{a}_C} \underbrace{-\vec{\alpha} \times \vec{r}_R}_{=\vec{a}_E} \underbrace{-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)}_{=\vec{a}_F}, && \text{(12c)}
\end{aligned}$$

wobei $\vec{a}_C$ die Coriolis-, $\vec{a}_E$ die Euler- und $\vec{a}_F$ die Zentrifugalbeschleunigung bezeichnen.

Ein in R ortsfester, d.h. rotierender Beobachter muss für die Erklärung der Bewegung des Massepunktes P somit zusätzliche Beschleunigungen aufgrund der „überlagerten" Rotation einführen. Für eine korrekte Beschreibung der Bewegung in den Koordinaten von R gelten (8), (11) und (12).

Multipliziert man die Beschleunigung mit der Masse m, so erhält man gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz die zugehörige Kaft bzw. deren Anteile, also die Coriolis-, Euler- und Zentrifugalkraft.

Diskussion:

- Die Coriolis-Beschleunigung $\vec{a}_C$ tritt nur dann auf, wenn $\dot{\vec{r}}_R \neq \vec{0}$ ist. Ruht der Massepunkt P in R, d.h. ist $\dot{\vec{r}}_R = \vec{0}$, so vereinfacht sich (12c) zu

$$\ddot{\vec{r}}_R = \vec{a}_R \underbrace{-\vec{\alpha} \times \vec{r}_R}_{=\vec{a}_E} \underbrace{-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)}_{=\vec{a}_F} . \tag{13}$$

- Wenn $\vec{\omega} = konst.$ (=gleichmäßige Rotation) $\Rightarrow \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ gilt, vereinfachen sich (11) zu

$$\dot{\vec{r}}_R = \vec{v}_R \tag{14}$$

  und (12c) zu

$$\ddot{\vec{r}}_R = \vec{a}_R \underbrace{-2\vec{\omega} \times \vec{v}_R}_{=\vec{a}_C} \underbrace{-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)}_{=\vec{a}_F} . \tag{15}$$

  Die Euler-Beschleunigung ist somit jener Teil der Gesamtbeschleunigung, der durch eine etwaige Ungleichförmigkeit der Drehbewegung des Bezugssystems verursacht wird.

- Die Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_F$ tritt bei zueinander rotierenden Bezugssystemen immer auf.

Übung 1: Überprüfe mittels der Rechten-Hand-Regel für einige selbst gewählte Beispiele die Richtungen der auftretenden Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren.

Übung 2: Rechne das Arbeitsblatt, insbesondere die Beziehungen in (12) mit einem CAS (z.B. Wx-Maxima) nach.