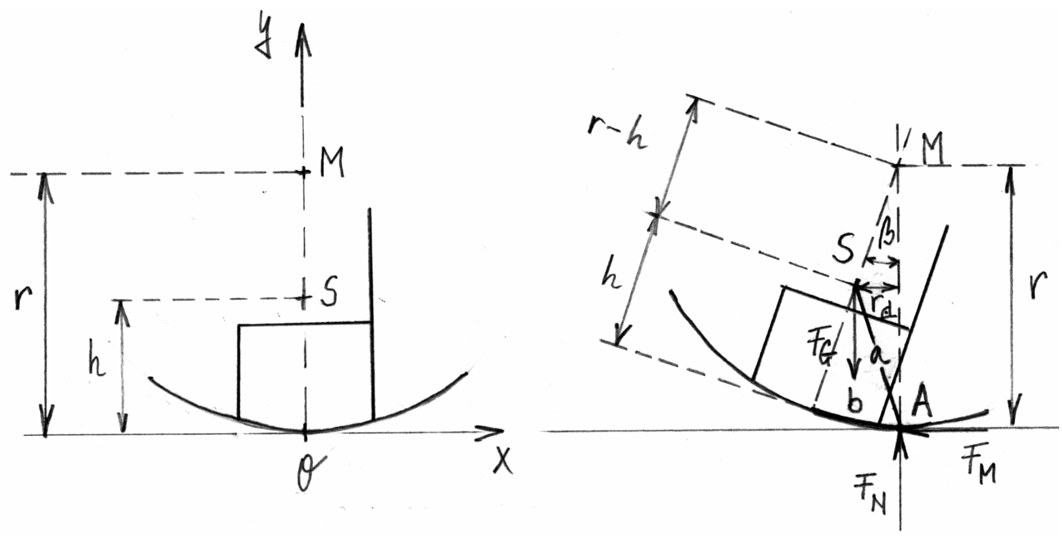
Der Schaukelstuhl

Der vorliegende Artikel beschreibt das Schwingen eines Schaukelstuhls mit kreisbogenförmigen Kufen. In den ersten beiden Abschnitten wird auf zwei verschiedene Arten unter Vernachlässigung der Reibung die Bewegungsgleichung hergeleitet. Im ersten Abschnitt wird über Energiebetrachtungen mit dem Lagrange-II-Formalismus argumentiert, im zweiten Abschnitt mittels Newtonscher Betrachtung die Bewegungsgleichung direkt aufgestellt. Der dritte Abschnitt zeigt einen argumentativ interessanten, leider nicht zielführenden Ansatz, der zu einer falschen (nichtlinearen) Bewegungsgleichung führt. Der vierte Abschnitt widmet sich der Herleitung der Schwingungsdauer bzw. Frequenz für die linearisierte Bewegungsgleichung.

1 Herleitung der Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-II-Formalismus

Skizze (links... Ruhelage, rechts... ausgelenkter Zustand, Neigungswinkel β):



Für die Herleitung der Bewegungsgleichung werden zuerst die Koordinaten (x_s, y_s) des Schwerpunktes S in Abhängigkeit des Winkels $\beta = \beta(t)$ aufgestellt. Geometrische Überlegungen gemäß obiger Skizze ergeben

$$x_s = b - (r-h)\sin(\beta) = r\beta - (r-h)\sin(\beta) \text{ und} \tag{1a}$$
$$y_s = r - (r-h)\cos(\beta). \tag{1b}$$

Hierin bezeichnen $b = r\,\beta$ die abrollende Bogenlänge bei einem Neigungswinkel β, r den Radius der Kufen und h die Höhe des Schwerpunktes im nicht ausgelenkten Zustand (=Ruhelage).

Zur Berechnung der Lagrange-Funktion $L = E_k - E_p$ werden vorab die Formeln für die kinetische Energie E_k und potentielle Energie E_p aufgestellt. Es gilt (E_{tk}... translatorische kinetische Energie, E_{rk}... rotatorische kinetische Energie)

$$E_k = E_{tk} + E_{rk} \tag{2a}$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2\right) + \frac{1}{2}I_s\dot{\beta}^2, \tag{2b}$$

wobei m die Masse, I_s das Trägheitsmoment des Schaukelstuhls bezüglich des Schwerpunktes S und $\dot{()} = \frac{d}{dt}$ die Ableitung nach der Zeit t bezeichnen. Setzt man die Beziehungen (1) in (2) ein, erhält man

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{d}{dt}\left(r\beta - (r-h)\sin(\beta)\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\left(r - (r-h)\cos(\beta)\right)\right)^2\right) + \frac{1}{2}I_s\dot{\beta}^2, \tag{3}$$

bzw. nach dem Ausführen der Differentiationen, Auflösen der Klammern, Ausnutzen der Beziehung $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$ und Herausheben

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{\beta}^2\left(r^2 - 2r(r-h)\cos(\beta) + (r-h)^2\right) + \frac{1}{2}I_s\dot{\beta}^2. \tag{4}$$

Für die potentielle Energie E_p gilt

$$\begin{aligned} E_p &= mgy_s & (5) \\ &= mg\left(r-(r-h)\cos(\beta)\right). & (6) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion L zu

$$\begin{aligned} L &= E_k - E_p & (7) \\ &= \frac{1}{2}m\dot\beta^2\left(r^2-2r(r-h)\cos(\beta)+(r-h)^2\right)+\frac{1}{2}I_s\dot\beta^2 - mg\left(r-(r-h)\cos(\beta).\right) & (8) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\beta}-\frac{\partial L}{\partial\beta}=0 \tag{9}$$

gelangt man zur Bewegungsgleichung für die Bewegung des Schaukelstuhls. Schrittweise hingeschrieben erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot\beta} &= m\dot\beta\left(r^2-2r(r-h)\cos(\beta)+(r-h)^2\right)+I_s\dot\beta, & (10) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\beta} &= m\ddot\beta\left(r^2-2r(r-h)\cos(\beta)+(r-h)^2\right)+m\dot\beta\,2r(r-h)\sin(\beta)\dot\beta+I_s\ddot\beta, & (11) \\ \frac{\partial L}{\partial\beta} &= \frac{1}{2}m\dot\beta^2\,2r(r-h)\sin(\beta)-mg(r-h)\sin(\beta). & (12) \end{aligned}$$

Für die Bewegungsgleichung folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\beta}-\frac{\partial L}{\partial\beta} &= m\ddot\beta\left(r^2-2r(r-h)\cos(\beta)+(r-h)^2\right)+2m\,r(r-h)\sin(\beta)\dot\beta^2+I_s\ddot\beta & (13) \\ &- m\,r(r-h)\sin(\beta)\dot\beta^2+mg(r-h)\sin(\beta)=0, & (14) \end{aligned}$$

bzw. nach Vereinfachung

$$\left(I_S+m\left(r^2-2r(r-h)\cos(\beta)+(r-h)^2\right)\right)\ddot\beta+mr(r-h)\sin(\beta)\dot\beta^2+mg(r-h)\sin(\beta)=0. \tag{15}$$

Im folgenden Abschnitt wird mit einem alternativen Ansatz die Bewegungsgleichung noch einmal hergeleitet.

2 Herleitung der Bewegungsgleichung mittels Newtonscher Betrachtung

Ausgehend von obiger Skizze gilt gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz für den Schwerpunkt S in x- und y-Richtung

$$\begin{aligned} m\ddot x_s &= -F_M \quad \text{und} & (16) \\ m\ddot y_s &= -F_G+F_N, & (17) \end{aligned}$$

wobei F_M die (das Drehmoment verursachende) Reibungskraft, F_N die Normalkraft und $F_G = mg$ die Schwerkraft bezeichnen. Die entsprechenden Ausdrücke für $\ddot x_s$ und $\ddot y_s$ erhält man durch Bildung der 2. Ableitungen von (1). Man erhält

$$\begin{aligned} m(r\ddot\beta+(r-h)\sin(\beta)\dot\beta^2-(r-h)\cos(\beta)\ddot\beta) &= -F_M \quad \text{und} & (18) \\ m((r-h)\cos(\beta)\dot\beta^2+(r-h)\sin(\beta)\ddot\beta) &= -F_G+F_N. & (19) \end{aligned}$$

Die zugehörige Drehimpulsbilanz lautet

$$I_S\ddot\beta=-F_N\,(r-h)\sin(\beta)+F_M(r-(r-h)\cos(\beta)). \tag{20}$$

Berechnet man aus (18)

$$F_M = -m(r\ddot{\beta} + (r-h)\sin(\beta)\dot{\beta}^2 - (r-h)\cos(\beta)\ddot{\beta}), \tag{21}$$

bzw. aus (19)

$$F_N = mg + m((r-h)\cos(\beta)\dot{\beta}^2 + (r-h)\sin(\beta)\ddot{\beta}) \tag{22}$$

und setzt man diese Beziehungen in die Drehimpulsbilanz ein, erhält man nach Vereinfachung unter Berücksichtigung von $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$ und entsprechender Umformung die gesuchte Bewegungsgleichung

$$\left(I_S + m\left(r^2 - 2r(r-h)\cos(\beta) + (r-h)^2\right)\right)\ddot{\beta} + mr(r-h)\sin(\beta)\dot{\beta}^2 + mg(r-h)\sin(\beta) = 0. \tag{23}$$

Diese ist ident mit (15).

3 Nicht zielführender „rotatorischer“ Ansatz

Der folgende Ansatz ist m.E. eine interessante Überlegung. Das Ergebnis der Herleitung, also die Bewegungsgleichung zeigt jedoch, dass diese Betrachtung, zumindest im nichtlinearen Fall, falsch ist.

Für das Trägheitsmoment I_A bezüglich des Kontaktpunktes A gilt gemäß dem Satz von Steiner unter Zuhilfenahme des cos-Satzes für den Abstand $AS = a$ (siehe Skizze) $a^2 = r^2 + (r-h)^2 - 2r(r-h)\cos(\beta)$

$$I_A = I_s + ma^2 = I_s + m(r^2 + (r-h)^2 - 2r(r-h)\cos(\beta)). \tag{24}$$

Da I_A aufgrund der Tatsache, dass $\beta = \beta(t)$, zeitlich nicht konstant ist, muss die linke Seite der Bewegungsgleichung verallgemeinert werden. Aus dem Drehimpuls $L_D = I_A\dot{\beta}$ folgt für das Drehmoment M als dessen zeitliche Ableitung

$$M = \dot{L}_D = \dot{I}_A\dot{\beta} + I_A\ddot{\beta}. \tag{25}$$

Für die rechte Seite unserer Bewegungsgleichung („Summe aller angreifenden Drehmomente“) gilt

$$M = F_G\, r_\perp \tag{26}$$

mit

$$F_G = -mg \text{ und} \tag{27}$$
$$r_\perp = (r-h)\sin(\beta), \tag{28}$$

wobei F_G die Gewichtskraft und $r_\perp$ den Normalabstand bezeichnen (siehe obige Skizze). Zusammengesetzt erhält man verallgemeinert in Analogie zum 2. Newtonschen Gesetz

$$\dot{I}_A\dot{\beta} + I_A\ddot{\beta} = F_G\, r_\perp. \tag{29}$$

Setzt man (24) bis (28) in (29) ein und führt man die Differentiation $\dot{I}_A$ aus, erhält man nach entsprechender Umformung bzw. Vereinfachung

$$\left(I_s + m(r^2 + (r-h)^2 - 2r(r-h)\cos(\beta))\right)\ddot{\beta} + 2mr(r-h)\sin(\beta)\dot{\beta}^2 + mg\,(r-h)\sin(\beta) = 0. \tag{30}$$

Die so erhaltene Bewegungsgleichung ist **NICHT** ident mit der Bewegungsgleichung (15) bzw. (23). Problem: Ein zusätzlicher Faktor 2 im zweiten Term der linken Seite von (30). Ohne tiefer gehende Analyse gehe ich davon aus, dass der Ansatz nicht korrekt ist, da der Schwerpunkt S nicht auf der Drehachse liegt.

4 Herleitung der Schwingungsdauer bzw. Frequenz für die linearisierte Bewegungsgleichung

Mittels der entsprechenden Linearisierungen $\cos(\beta) \approx 1$, $\sin(\beta) \approx \beta$ für hinreichend kleine Auslenkungen β folgt für (15) bzw. (23)

$$\left(I_S + m\left(r^2 - 2r(r-h) + (r-h)^2\right)\right)\ddot{\beta} + mr(r-h)\beta\dot{\beta}^2 + mg(r-h)\beta = 0. \tag{31}$$

Da zusätzlich zu β auch $\dot{\beta}$ als klein angenommen wird, kann der Term $mr(r-h)\beta\dot{\beta}^2$ in erster Näherung 0 gesetzt werden. Nach dem Vereinfachen der verbleibenden Klammer erhält man

$$\left(I_S + mh^2\right)\ddot{\beta} + mg\,(r-h)\beta = 0, \tag{32}$$

bzw.

$$\ddot{\beta} + \frac{mg(r-h)}{I_s + mh^2}\beta = 0. \tag{33}$$

Durch die getätigten Linearisierungen hat die Bewegungsgleichung die Bauform der Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators, woraus für die Kreisfrequenz ω

$$\omega^2 = \frac{mg(r-h)}{I_s + mh^2} \tag{34}$$

folgt.

Mit den bekannten Zusammenhängen $\omega = 2\pi f$ bzw. $T = \frac{1}{f}$ folgen für die Frequenz f und die Periodendauer T

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(r-h)}{I_s + mh^2}} \tag{35}$$

bzw.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_s + mh^2}{mg(r-h)}}. \tag{36}$$