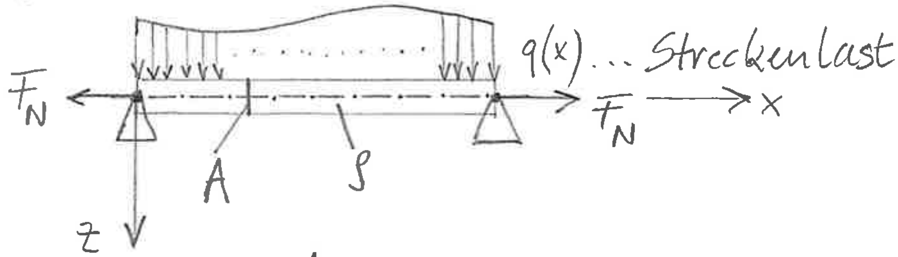
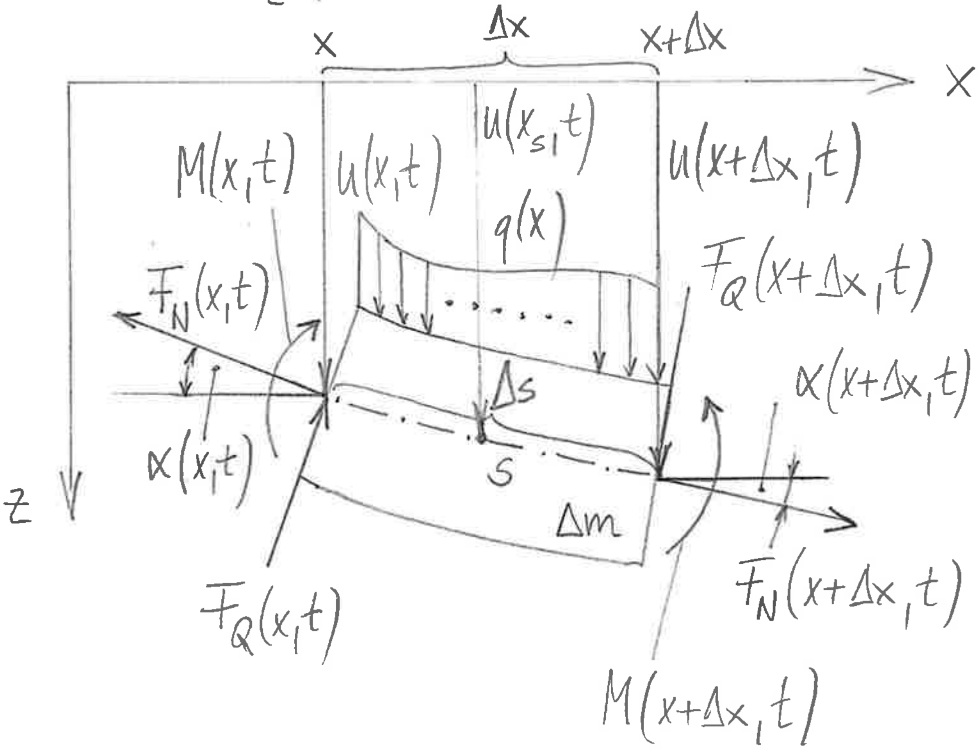
Herleitung der Schwingungsgleichung für einen Balken:

Skizze:





$$\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta x$$

$$\underbrace{\Delta I}_{\text{Trägheitsmoment}} = \rho \cdot \underbrace{I_y}_{\text{Flächenträgheitsmoment}} \cdot \Delta x$$

Newton II:

$$\Delta m \cdot \frac{\partial^2 u(x_s,t)}{\partial t^2} = F_Q(x+\Delta x,t)\cdot\cos(\alpha(x+\Delta x,t)) - F_Q(x,t)\cdot\cos(\alpha(x,t)) + F_N(x+\Delta x,t)\cdot\sin(\alpha(x+\Delta x,t)) - F_N(x,t)\cdot\sin(\alpha(x,t)) + \int_x^{x+\Delta x} q(x)\,dx$$

$$\rho\cdot A\cdot\cancel{\Delta x}\frac{1}{\cancel{\Delta x}}\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,dx = \int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\left(F_Q(x,t)\cdot\cos(\alpha(x,t))\right)dx + \int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\left(F_N(x,t)\cdot\sin(\alpha(x,t))\right)dx + \int_x^{x+\Delta x} q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_x^{x+\Delta x}\left(\rho\cdot A\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(F_Q(x,t)\cdot\cos(\alpha(x,t))\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(F_N(x,t)\cdot\sin(\alpha(x,t))\right) - q(x)\right)dx = 0$$

Muss $\forall\,[x, x+\Delta x]$ gelten, $\Longrightarrow$

$$\rho A\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_Q(x,t)\cdot\cos(\alpha(x,t))\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(F_N(x,t)\sin(\alpha(x,t))\right) + q(x)$$

Mit $\dot{(\ldots)} = \frac{\partial}{\partial t}(\ldots)$, $(\ldots)' = \frac{\partial}{\partial x}(\ldots)$ sowie

$\alpha = \alpha(x,t)$, $u = u(x,t)$ sowie $\Delta u = u(x+\Delta x, t) - u(x,t)$ gilt:

$$\sin(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}$$

$$\Longrightarrow \rho \cdot A \cdot \ddot{u} = \left(F_Q \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}\right)' + \left(F_N \cdot \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)' + q$$

<u>Linearisierung:</u> Wenn $u' \downarrow \Longrightarrow \sqrt{1+u'^2} \approx 1$

$$\Longrightarrow \rho \cdot A \ddot{u} = F_Q' + (F_N \cdot u')' + q \qquad (1)$$

<u>Newton II für die Rotation bezügl. S:</u>

$$\Delta I \cdot \ddot{\alpha}(x_s, t) = -M(x+\Delta x, t) + M(x,t) + \frac{\Delta s}{2} F_Q(x+\Delta x, t) + \frac{\Delta s}{2} F_Q(x,t)$$

⚠

↑ Trägheitsmoment (siehe Seite 1)

$$\rho \cdot I_y \cdot \Delta x \, \ddot{\alpha}(x_s, t) = -M(x+\Delta x, t) + M(x,t) + \frac{\Delta s}{2}\left(F_Q(x+\Delta x, t) + F_Q(x,t)\right) \quad \Big| : \Delta x$$

Mit $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}$ & $\Delta u \downarrow \Longrightarrow \Delta s \approx \Delta x$:

$$\rho \cdot I_y \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \ddot{\alpha}(x_s, t)}_{} = -\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{M(x+\Delta x, t) - M(x,t)}{\Delta x}\right) + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left(F_Q(x+\Delta x, t) + F_Q(x,t)\right)}_{}$$

$$\rho \cdot I_y \cdot \ddot{\alpha}(x,t) = -M'(x,t) + \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot F_Q(x,t)$$

<u>Taylor:</u> Wenn $\alpha \downarrow \Rightarrow \underbrace{\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha}_{(\text{\& } \cos\alpha \approx 1)}$

Mit $\sin\alpha = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}$ & $u' \downarrow \Rightarrow \sqrt{1+u'^2} \approx 1$

folgt: $\left.\begin{aligned} \sin\alpha &\approx u' \\ \sin\alpha &\approx \alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha \approx u'$

bzw. $\underline{\underline{\ddot{\alpha} = \ddot{u}'}}$

$$\Longrightarrow \rho \cdot I_y \cdot \ddot{u}' = -M' + F_Q$$

bzw. $F_Q = \rho \cdot I_y \cdot \ddot{u}' + M'$

<u>Eingesetzt in (1):</u>

$$\rho \cdot A \cdot \ddot{u} = (\rho \cdot I_y \cdot \ddot{u}') + M'' + (F_N \cdot u')' + q$$

Bekannt ist die Gleichung der Biegelinie (siehe Anhang):

$$M = -\underset{\text{E-Modul}}{E} \cdot I_y \cdot u''$$

$$\Longrightarrow \boxed{\rho \cdot A \cdot \ddot{u} = (\rho \cdot I_y \cdot \ddot{u}')' - (E \cdot I_y u'')'' + (F_N u')' + q}$$

... „vollständige" Bewegungsgleichung für die Schwingung eines Balkens

Vereinfachungen bzw. Spezialfälle:

•) Vereinfachte Bewegungsgleichung:

$F_N \approx 0 \quad \wedge \quad \rho \cdot I_y \approx 0 \quad \wedge \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \underline{\rho \cdot A \ddot{u} = -E \cdot I_y \cdot u'''' + q}$$

•) Saitenschwingung / Wellengleichung:

$E \cdot I_y = 0, \quad \rho \cdot I_y = 0, \quad q = 0 \quad \wedge \quad F_N = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \rho \cdot A \cdot \ddot{u} = F_N \cdot u'' \quad |:\rho$$

bzw. mit $\sigma = \frac{F_N}{A}$ ... Spannung

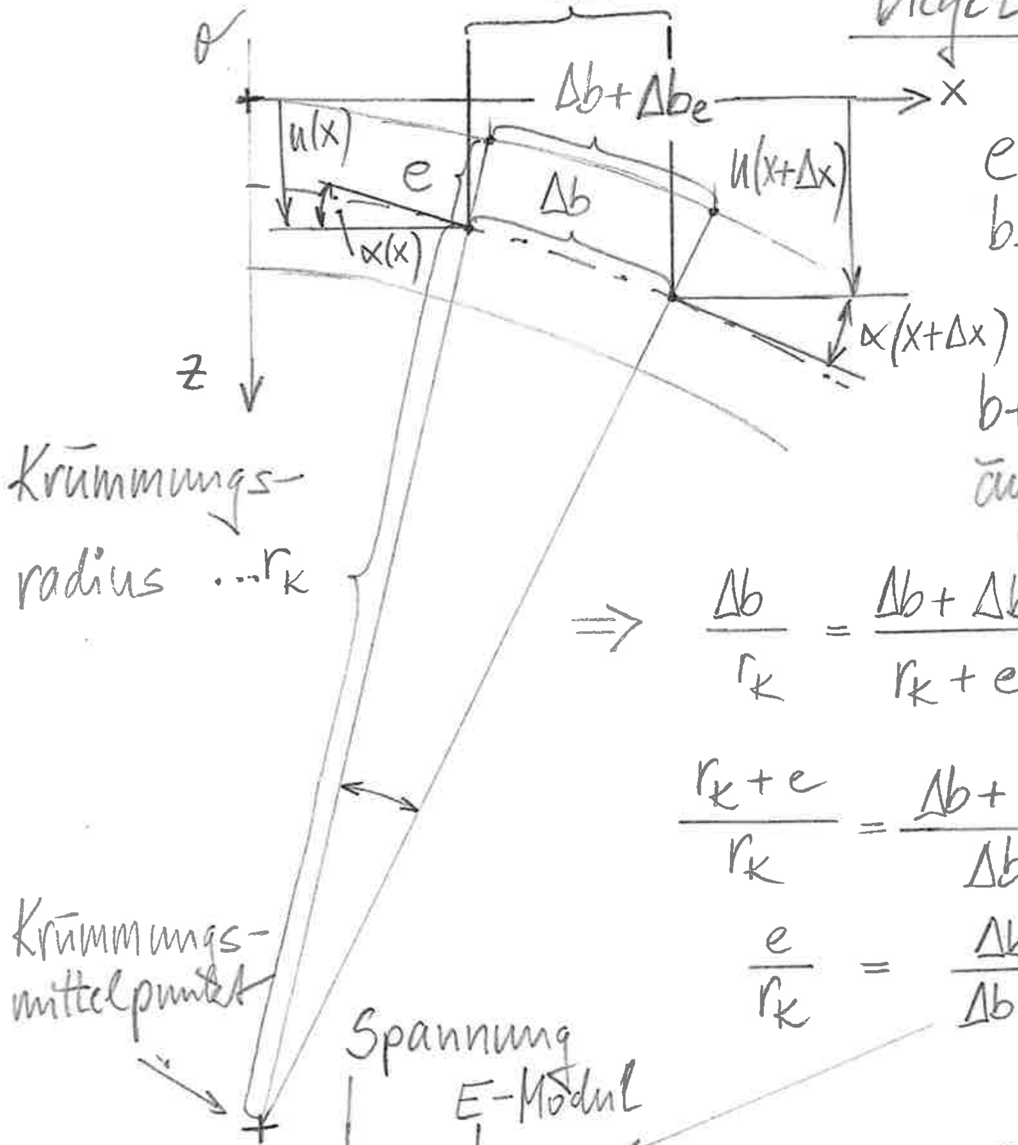
$$\underline{\ddot{u} = \frac{\sigma}{\rho} u''}$$

•) Statischer Fall:

$\ddot{u} = 0, \quad E \cdot I_y = \text{konst.}$

$$\underline{E \cdot I_y u'''' = (F_N u')' + q}$$

Anhang: Herleitung der DGL für die Biegelinie (statisch)



$e \dots$ Randfaserabstand

$b \dots$ Bogenlänge der Nullfaser

$b + \Delta b \dots$ Bogenlänge der äußersten Zugfaser

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta b}{r_K} = \frac{\Delta b + \Delta b_e}{r_K + e} \quad \Big| : b \Big| \cdot (r_K + e)$$

$$\frac{r_K + e}{r_K} = \frac{\Delta b + \Delta b_e}{\Delta b}$$

$$\frac{e}{r_K} = \frac{\Delta b_e}{\Delta b} = \varepsilon \dots \text{Dehnung}$$

Spannung

E-Modul

Hooke: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ & Biege-Gleichung $\sigma = \dfrac{M}{W}$

$M \dots$ Biegemoment

$W \dots$ axiales Widerstandsmoment

$W = \dfrac{I_y}{e}$, $I_y \dots$ Flächenträgheitsmoment

$$\sigma = E \cdot \frac{e}{r_K}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{M}{I_y} e$$

$$E \cdot \frac{\cancel{e}}{r_K} = \frac{M}{I_y} \cdot \cancel{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_K = \frac{E I_y}{M}}}$$

Weiters gilt: $\varkappa$ ... Krümmung

$$\varkappa = \frac{1}{r_K}$$

und **Def:** $\varkappa = \frac{d\alpha}{db}$ „Neigungs-∢ pro Bogenlänge"

$$\varkappa = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{db}$$

$$u = u(x) \quad , \quad u' = \frac{du}{dx} = \tan\alpha \quad \text{mit } \alpha = \alpha(x)$$

$$u'' = \frac{d}{dx}(\tan\alpha) = \underbrace{\left(1 + \tan^2(\alpha)\right)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\frac{d\alpha}{dx}}_{\text{innere Abl.}}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{u''}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{u''}{1 + u'^2}$$

außerdem gilt: $\Delta b = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} \quad \Big| \lim_{\Delta x \to 0}(\dots)$

bzw. differenziell $db = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \underbrace{\frac{du^2}{dx^2}}_{= u'^2}}$

$$\Longrightarrow \frac{db}{dx} = \sqrt{1 + u'^2} \Longrightarrow \frac{dx}{db} = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}}$$

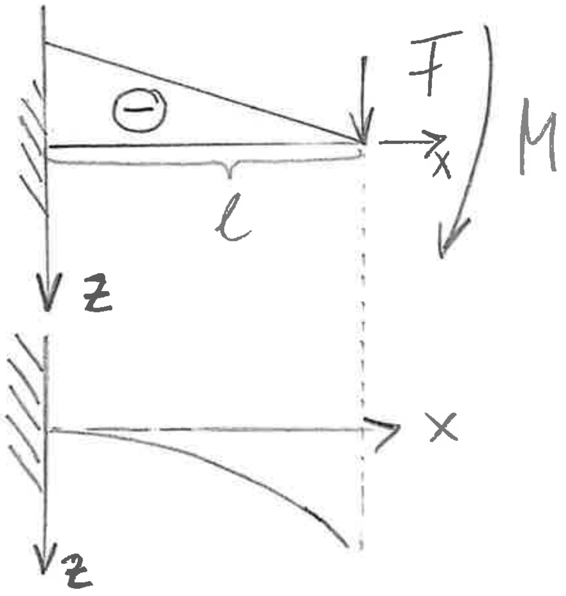
$$\varkappa = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{db} = \frac{u''}{1 + u'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} = \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}}$$

$$\varkappa = \frac{1}{r_K} = \frac{1}{\left|\frac{EI_y}{M}\right|} = \left|\frac{M}{EI_y}\right|$$

$$\Longrightarrow \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} = - \frac{M}{E \cdot I_y}$$

⚠

Das Minuszeichen erklärt sich wie folgt:



$M = F \cdot l$

im Uhrzeigersinn ⇒ math. neg.

Die Krümmung ist für z-Koord. „nach unten" positiv.

Vereinfachung: ist $u' \downarrow \Rightarrow 1 + u'^2 \approx 1$

$$\Longrightarrow \quad u'' = -\frac{M}{E \cdot I_y}$$

bzw. $\underline{\underline{M = -E \cdot I_y \cdot u''}}$