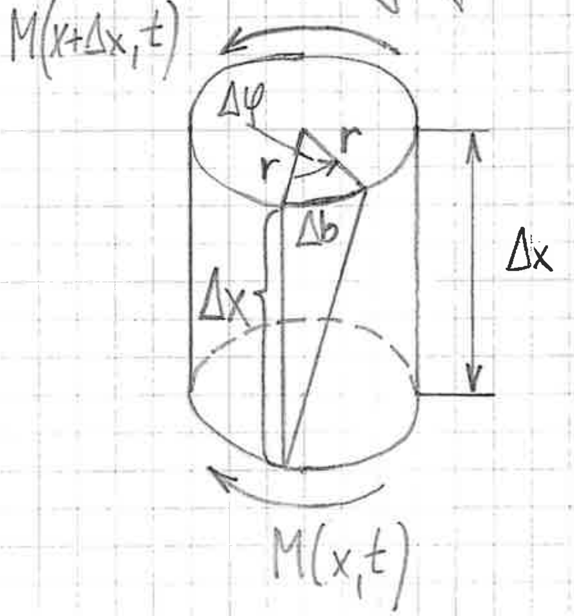
Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:

Torsionsschwingungen – kreisförmiger Stab



M ... Torsionsmoment
Δb ... Bogenlänge
$\Delta\varphi$ ... (Ver-)drehwinkel

Zusammenhang Trägheitsmoment I & polares Flächenträgheitsmoment I_p:

$$I = \int_V \tilde{r}^2 \, dm = \int_V \tilde{r}^2 \cdot \rho \cdot dV \overset{\text{Zylinder}}{=} \int_A \tilde{r}^2 \rho \cdot \overbrace{\Delta x}^{=\text{Zylinderhöhe}} \cdot dA$$

$$= \rho \cdot \Delta x \underbrace{\int_A \tilde{r}^2 \, dA}_{\text{Def.}} = \rho \cdot \Delta x \cdot I_p \qquad (1)$$

Bemerkung: Bei kreisförmiger Querschnittsfläche ist das polares Flächenträgheitsmoment I_p gleich dem Torsionsträgheitsmoment I_T.

Das Hookesche Gesetz für die Torsion:

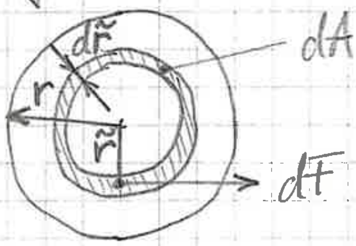
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{max. Torsionsspannung}}}{\tau} = G \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta b}{\Delta x} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schubmodul}}}{G} \frac{db}{dx}$$

(analog zu $\sigma = E \cdot \varepsilon$ bei Zugspannungen)

Weiters gilt $b = r \cdot \underset{\text{in rad}}{\varphi}$ bzw. $db = r \cdot d\varphi$

$$\Longrightarrow \tau = G \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

Zusammenhang Torsionsmoment M & polares Flächenträgheitsmoment I_p:



τ_R ... Torsionsspannung im Ring dA

$$\Rightarrow dF = \tau_R \cdot dA \;, \quad \underbrace{dM}_{\text{Torsionsmoment eines Ringes}} = \tilde{r} \cdot dF = \tilde{r} \cdot \tau_R \cdot dA$$

mit $\tau = \tau_{max} = \tau_R(r)$ gilt: $\tau_R = \tau \cdot \frac{\tilde{r}}{r}$

$$\Longrightarrow dM = \frac{\tau}{r} \cdot \tilde{r}^2 dA$$

$$M = \frac{\tau}{r} \underbrace{\int_A \tilde{r}^2 dA}_{\text{Def.}} = \frac{\tau}{r} \cdot I_p = \tau \cdot \frac{I_p}{r}$$

$$\Rightarrow \underline{M} = G \cdot \cancel{r} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{I_p}{\cancel{r}} = \underline{G \cdot I_p \cdot \frac{d\varphi}{dx}} \quad (2)$$

Analogie zur Translation:

$$\left.\begin{aligned} F &= E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \\ M &= G \cdot I_p \cdot \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}\right\} \checkmark$$

Herleitung der Wellengleichung, Variante 1:

Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:

Ansatz: Newton II für die Rotation:

$$I\cdot\ddot{\varphi}(x,t) = M(x+\Delta x,t) - M(x,t)$$

$$\overbrace{\rho\cdot\Delta x\cdot\cancel{I_R}}^{(1)}\cdot\ddot{\varphi}(x,t) = \overbrace{G\cdot\cancel{I_R}\cdot\varphi'(x+\Delta x,t)}^{(2)} - \overbrace{G\cdot\cancel{I_R}\cdot\varphi'(x,t)}^{(2)} \quad \Big|:\Delta x$$

$$\rho\cdot\ddot{\varphi}(x,t) = G\cdot\frac{\varphi'(x+\Delta x,t)-\varphi'(x,t)}{\Delta x} \quad \Big|\lim_{\Delta x\to 0}(\ldots)$$

$$\rho\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\ddot{\varphi}(x,t)} = G\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi'(x+\Delta x,t)-\varphi'(x,t)}{\Delta x}}$$

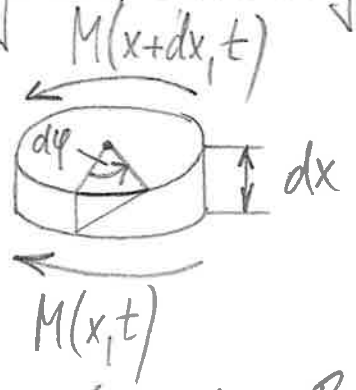
$$\rho\cdot\ddot{\varphi}(x,t) = G\cdot\varphi''(x,t)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{G}{\rho}\cdot\varphi''(x,t)}$$ ... Wellengleichung für Torsionsschwingungen

Mit $\varphi = \varphi_0\cdot\sin(\omega t - kx) \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

$\uparrow$ Phasengeschwindigkeit

Herleitung der Wellengleichung, Variante 2:



Newton II für die Rotation:

$$dI \cdot \ddot{\varphi} = M(x+dx,t) - M(x,t)$$

TAYLOR

$$dI \cdot \ddot{\varphi} = \overbrace{\cancel{M(x,t)} + M'(x,t)\,dx} - \cancel{M(x,t)}$$

$$\overbrace{\rho \cdot \cancel{I_p} \cdot \cancel{dx}}^{(1)} \cdot \ddot{\varphi} = \overbrace{\left(G \cdot \cancel{I_p} \cdot \varphi'\right)'}^{(2)} \cancel{dx}$$

$$\rho \cdot \ddot{\varphi} = G \cdot \varphi''$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{G}{\rho} \cdot \varphi''}$$ ... Wellengleichung