

# Verkehrsflussmodelle

Eine typische Fragestellung in der Verkehrsplanung ist die nach der Länge der Ampelphasen, damit bei durchschnittlichem Verkehrsaufkommen während einer Grünphase alle angestellten Fahrzeuge die Kreuzung passieren können. Um eine Antwort auf eine solche Frage geben zu können, ist es notwendig, das Verhalten einer Fahrzeugkolonne mathematisch/physikalisch zu modellieren. Wir diskutieren im Folgenden die einfachsten Modellierungen für Verkehrsflüsse. Hierbei geht man von der (bekannten) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

aus, wobei  $\rho = \rho(x, t)$  die Dichte der Fahrzeuge auf der Straße und  $v = v(x, t)$  die Geschwindigkeit der Fahrzeuge bezeichnen. Die SI-Einheit der Fahrzeugdichte ist somit  $\frac{1}{m}$  (Fahrzeuge pro Straßenlängeneinheit). Wir bezeichnen zunächst das Produkt  $\rho v$  naheliegend als Flussdichte  $j$ , d.h.  $j = \rho v \Rightarrow j = j(x, t)$ . Die Kontinuitätsgleichung wird dadurch zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Wie bei der Kontinuitätsgleichung diskutiert, enthält (1) zwei unbekannte Funktionen, nämlich  $\rho(x, t)$  und  $v(x, t)$ , was eine isolierte Lösung ohne Zusatzinformation bzw. ohne zusätzliche Modellierung verhindert.

## 1 Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Im LWR-Modell wird die Geschwindigkeit  $v$  des Verkehrsstromes in Abhängigkeit von der Dichte  $\rho$  wie folgt modelliert

$$v(\rho) = v_{max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right), \quad (3)$$

wobei  $\rho_{max}$  die maximale Fahrzeugdichte ( $\hat{=}$ Fahrzeuge stehen Stoßstange an Stoßstange) und  $v_{max}$  die maximale Geschwindigkeit (=Maximalgeschwindigkeit bei leerer Straße, zulässige Höchstgeschwindigkeit) bezeichnen. Durch Einsetzen in (3) erkennt man

$$v(\rho = 0) = v_{max}, \quad (4)$$

$$v(\rho = \rho_{max}) = 0, \quad (5)$$

wobei zwischen diesen beiden Grenzggeschwindigkeiten die Geschwindigkeit linear abnimmt ( $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$ ). Bei Betrachtung von (3) lassen sich folgende zugrundeliegende Vereinfachungen formulieren:

- Die Straße ist einspurig.
- Es gibt keine Überholmöglichkeiten.
- Es existieren keine Abzweigungen bzw. Zu- und Abfahrten.

Setzt man (3) in (1) erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \overbrace{\rho v_{max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right)}^{=j} \right) = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{max} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho - \frac{1}{\rho_{max}} \rho^2 \right) = 0, \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{max} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v_{max}}{\rho_{max}} \frac{\partial \rho^2}{\partial x} = 0. \quad (6c)$$

Diese *nichtlineare* partielle Differentialgleichung in  $\rho(x, t)$  kann für entsprechende Anfangs- und Randbedingungen bei geeigneter Diskretisierung numerisch oder mit der Methode der Charakteristiken<sup>1</sup> gelöst werden.

## 2 Modifiziertes LWR-Modell

Wir modifizieren die Flussdichte  $j$  des LWR-Modells (siehe (6)) des vorigen Abschnittes zu

$$j = \rho v_{max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) - \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (7)$$

Der letzte Term in (7) mit  $\varepsilon > 0$  verursacht bei Dichteänderungen  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  zusätzliche Abstandsänderungen zwischen den Fahrzeugen.  $\Rightarrow$  Die Fahrzeugkolonne wird beim Beschleunigen in die Länge gezogen. Setzt man (7) in (2) ein, erhält man nach entsprechender Umformung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{max} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v_{max}}{\rho_{max}} \frac{\partial \rho^2}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Die Gleichung ist ebenfalls nichtlinear, jedoch aufgrund der rechten Seite von Ordnung 2 statt 1. Eine numerische Lösung bietet sich an.

**Bemerkung:** Gleichung (8) kann in die sogenannte viskose Burgers-Gleichung (benannt nach Johannes Martinus Burgers (1895-1981), niederländischer Physiker) übergeführt werden. Diese lässt sich mittels der Hopf-Cole-Transformation lösen. Für  $\varepsilon = 0$  ergibt sich daraus der Spezialfall der nicht viskosen Burgers-Gleichung, welche sich auf direktem Weg aus (6) ergibt.

## 3 Greenberg-Modell

Hierbei gilt für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Dichte

$$v(\rho) = v_{max} \ln \left( \frac{\rho_{max}}{\rho} \right), \quad (9)$$

mit  $0 < \rho \leq \rho_{max}$ . Der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit  $v$  und der Dichte  $\rho$  ist im Gegensatz zum LWR-Modell nichtlinear. Auch hier gilt  $v(\rho = \rho_{max}) = 0$ , man beachte jedoch, dass man keine leere Straße betrachten darf, da der  $\ln(0)$  nicht definiert ist. Setzt man (9) in (1) ein, erhält man folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho v_{max} \ln \left( \frac{\rho_{max}}{\rho} \right) \right) = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - v_{max} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \ln \left( \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \right) = 0, \quad (10b)$$

die sich numerisch lösen lässt.

**Bemerkung:** Die Lösungen der einzelnen Modellgleichungen liefern stets die Fahrzeugdichte  $\rho$ . Die Anzahl der Fahrzeuge  $N$  im Streckenabschnitt  $\Delta x = x_2 - x_1$  zum Zeitpunkt  $t$  errechnet sich folglich aus

$$N = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx. \quad (11)$$

---

<sup>1</sup>Verlangt etwas mathematische Theorie... nicht schultauglich.