Die instationäre Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der zeitlichen und der räumlichen Änderung der Temperatur in einem Körper. Sie ist (wie die Wellengleichung) eine partielle Differentialgleichung (PDG)[1] und dient zur Beschreibung *in*stationärer Temperaturfelder. Wir beschränken unsere Betrachtungen zunächst auf eine eindimensionale Formulierung und verallgemeinern diese anschließend.

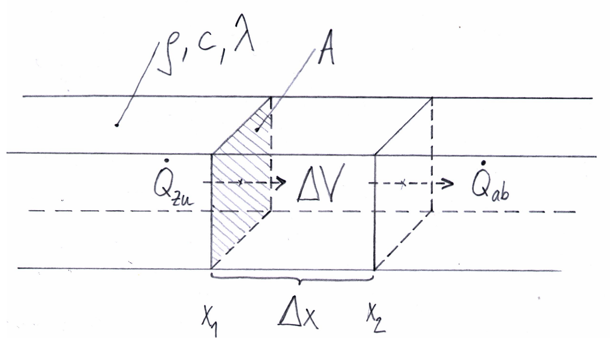
Herleitung

Gegeben sei ein Stab mit der Querschnittsfläche A und der (zur Vereinfachung) konstanten Wärmeleitfähigkeit[2] λ. Der Stab sei dabei so dünn, dass in der gesamten Querschnittsfläche A die Temperatur als gleich betrachtet werden kann. Wir gehen von der bekannten Wärmeleitungsgleichung für stationäre Zustände aus. Für den Wärmestrom $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ gilt

$$\dot{Q} = \lambda\, A\, \frac{\Delta T}{l}, \tag{1}$$

wobei ΔT die im stationären Fall konstante Temperaturdifferenz zwischen den Stabenden und l die Länge des Stabes bezeichnen. Den Bruch $\frac{\Delta T}{l}$ in (1) bezeichnen wir als Temperaturgefälle. Im instationären Fall, bei dem die Temperatur T von Ort x und Zeit t abhängt, also $T = T(x,t)$ gilt, verallgemeinern wir das Temperaturgefälle zu $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$.

Als Ansatz für die Herleitung stellen wir die Energiebilanz für einen Stababschnitt Δx bzw. das zugehörige Volumenelement ΔV auf (siehe Skizze).



Wie in der Skizze ersichtlich, gibt es an der Stelle x_1 einen Wärmetransport $\dot{Q}_{zu} = \dot{Q}(x_1,t)$ in das Volumenelement ΔV und an der Stelle $x_2 = x_1 + \Delta x$ einen Abtransport $\dot{Q}_{ab} = \dot{Q}(x_2,t)$. Da Wärme stets von Gebieten mit höherer Temperatur zu Gebieten niedrigerer Temperatur fließt, heißt das, dass im betrachteten Fall die Temperatur für größer werdende x kleiner wird und das Temperaturgefälle somit negativ sein muss, $-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$.

Im Zeitintervall dt gilt für die gesamte über die Grenzen an den Stellen x_1 und x_2 des Volumenelements ΔV transportierte Wärmemenge dQ_{tr}

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{tr} = \frac{dQ_{tr}}{dt} &= \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} && (2)\\
&= \dot{Q}(x_1,t) - \dot{Q}(x_2,t) && (3)\\
&= -\lambda\, A\, \frac{\partial T(x_1,t)}{\partial x} - \left(-\lambda\, A\, \frac{\partial T(x_2,t)}{\partial x}\right) && (4)\\
\Rightarrow dQ_{tr} &= \lambda\, A \left(\frac{\partial T(x_2,t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_1,t)}{\partial x}\right) dt. && (5)
\end{aligned}$$

[1] Die Diffusionsgleichung hat mathematisch die gleiche Bauart, die darin auftretenden Größen haben jedoch eine andere physikalische Bedeutung.

[2] Definition: Die Wärmeleitfähigkeit gibt jene Leistung an, die durch ein bestimmes Material von einem m^2 Querschnittsfläche bei einem Temperaturgefälle von einem Kelvin pro Meter übertragen wird.

Für den Zeitraum $\Delta t = [t_1, t_2]$ folgt daraus

$$Q_{tr} = \lambda\, A \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_1, t)}{\partial x} \right) dt. \tag{6}$$

Zusätzlich kann durch Heizen (oder Kühlen) dem Volumenelement ΔV Wärme zugeführt (oder entzogen) werden. Dies wird mit einem sogenannten Quellterm in der Wärmeleitungsgleichung berücksichtigt. Wir bezeichnen mit $\phi(x,t)$ die Wärmeleistung pro m^3, d.h. $[\phi] = \frac{W}{m^3} = \frac{J}{s\,m^3}$. Für die im Zeitintervall $\Delta t = [t_1, t_2]$ dem Volumenabschnitt $\Delta V = A\,\Delta x$ zugeführte Heizwärmemenge Q_h gilt somit

$$Q_h = A \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi(x,t)\, dt dx. \tag{7}$$

Die Änderung der inneren Energie dU eines infinitesimal kleinen Längenabschnitts dx des Stabes im Zeitintervall Δt kann durch

$$dU = dQ = c\, dm\, \left(T(x, t_2) - T(x, t_1)\right) \tag{8}$$

beschrieben werden, wobei c die konstante spezifische Wärmekapazität und $dm = \rho\, dV = \rho\, Adx$ die Masse des Stababschnitts dx bezeichnen. Die Änderung der inneren Energie im gesamten Volumenelement ΔV berechnet man durch Integration über die Ortskoordinate

$$\begin{aligned} \Delta U = Q &= \int_{x_1}^{x_2} dU & (9) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} c\rho A\, dx\, \left(T(x, t_2) - T(x, t_1)\right) & (10) \\ &= c\rho A \int_{x_1}^{x_2} \left(T(x, t_2) - T(x, t_1)\right) dx. & (11) \end{aligned}$$

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt mit (6), (7) und (11)

$$Q = Q_{tr} + Q_h \tag{12}$$

bzw.

$$c\rho A \int_{x_1}^{x_2} \left(T(x, t_2) - T(x, t_1)\right) dx = \lambda\, A \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_1, t)}{\partial x} \right) dt + A \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi(x,t)\, dt dx, \tag{13}$$

wobei der Integrand auf der linken Seite und der erste Integrand auf der rechten Seite nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wie folgt angeschrieben werden können

$$\begin{aligned} T(x, t_2) - T(x, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\, dt, & (14) \\ \frac{\partial T(x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial T(x_1, t)}{\partial t} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\, dx. & (15) \end{aligned}$$

Wir setzen die letzten beiden Beziehungen in (13) ein, dividieren die gesamte Gleichung durch A und vertauschen beim ersten Term auf der rechten Seite die Reihenfolge der Integrale

$$c\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\, dt dx = \lambda \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\, dt dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi(x,t)\, dt dx. \tag{16}$$

Durch weitere Umformung gelangt man zu

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \phi(x,t) \right) dt dx = 0. \tag{17}$$

Da die letzte Beziehung für beliebige Stababschnitte $\Delta x = [x_1, x_2]$ und beliebige Zeitintervalle $\Delta t = [t_1, t_2]$ erfüllt sein muss, gilt

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \phi(x,t) = 0 \text{ bzw.} \tag{18}$$

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \phi(x,t) \text{ (=inhomogene Wärmeleitungsgl.).} \tag{19}$$

Wird der Stab weder beheizt noch gekühlt, so ist $\phi(x,t) = 0$ zu setzen, wodurch sich die Wärmeleitungsgleichung zu ihrer homogenen Form

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \text{ mit } a = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{20}$$

vereinfacht.

Für eine Anwendung der Wärmeleitungsgleichung sind der Problemstellung entsprechende Anfangs- und Randbedingungen zu formulieren und die PDG inkl. dieser Bedingungen zu lösen.

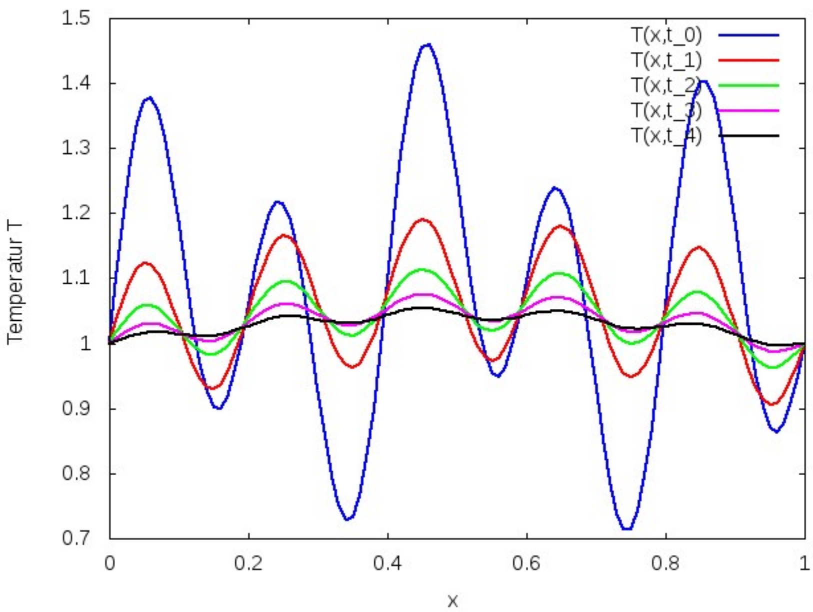
Für eine Verallgemeinerung auf zwei- oder dreidimensionale Temperaturfelder $T = T(x,y,t)$ bzw. $T = T(x,y,z,t)$ muss die 2. Ableitung nach dem Ort (wie bei der Wellengleichung) durch den entsprechenden Laplace-Operator ersetzt werden

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \tag{21}$$

wodurch die (homogene) Wärmeleitungsgleichung (d.h. ohne Heizfunktion ϕ) mit $\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}$ folgende Gestalt annimmt

$$\dot{T} = a\, \Delta T. \tag{22}$$

Beispiel: Die folgende Abbildung zeigt schematisch den Temperaturverlauf eines Stabes zu verschiedenen Zeitpunkten ($\phi = 0$).



Übung: Zeige durch Einsetzen der sogenannten Fundamentallösung

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-\frac{x^2}{4at}} \tag{23}$$

in (20), dass diese eine spezielle Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist.