Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:

Herleitung der Wellengleichung für Flachwasserwellen:

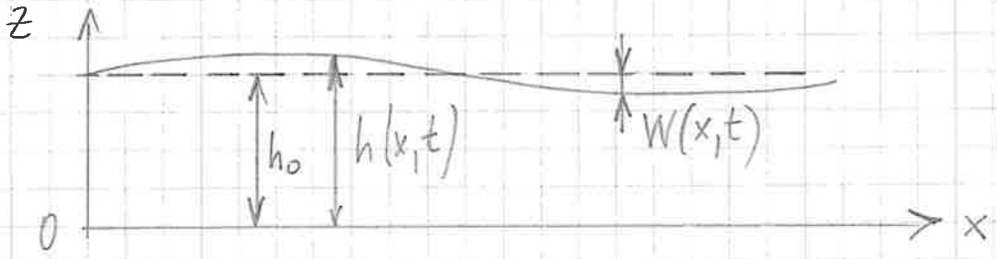
KG: $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (v \cdot h)}{\partial x} = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$

IG: $\frac{\partial (v \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} g h^2 + h v^2\right) = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x}$

$\ominus$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2} g h^2 + h v^2\right) = 0$$

Wenn $v \downarrow \Rightarrow$
$h v^2 \ll \frac{1}{2} g h^2$
$\Rightarrow \frac{1}{2} g h^2 + h v^2 \approx \frac{1}{2} g h^2$
bzw. $h \cdot v^2 \approx 0$



$$h(x,t) = h_0 + w(x,t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h_0 + w) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2} g (h_0 + w)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\cancel{2}} g \cdot \cancel{2}(h_0 + w) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g h_0 \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(w \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Linearisierung: Wenn $w \downarrow$ & $\frac{\partial w}{\partial x} \downarrow \Rightarrow$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(w \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right) \approx 0$

bzw. mit $\frac{\partial}{\partial t}(\ldots) = (\dot{\ldots})$ & $\frac{\partial}{\partial x}(\ldots) = (\ldots)'$

$$\boxed{\ddot{w} = g \cdot h_0 \cdot w''}$$

Thema [griechisch-lateinisch »Satz«, »abzuhandelnder Gegenstand«]:

Lösung für eine fortschreitende Welle:

$$w(x,t) = w_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$
$$\ddot{w}(x,t) = -w_0\,\omega^2 \cdot \sin(\omega t - kx)$$
$$w''(x,t) = -w_0 \cdot k^2 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

WGLG: $\ddot{w} = g h_0\, w''$

$$-\cancel{w_0} \cdot \omega^2 \cancel{\sin(\omega t - kx)} = -g h \cancel{w_0} \cdot k^2 \cdot \cancel{\sin(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = g h_0 \quad , \text{ mit } \omega = 2\pi f \wedge k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} \right)^2 = g \cdot h_0$$

$$(f \cdot \lambda)^2 = g \cdot h_0 \quad \text{mit } c = \lambda \cdot f \text{ (... Grundgleichung der Wellenlehre)}$$

$$c^2 = g \cdot h_0$$

bzw. $c = (\pm) \sqrt{g \cdot h_0}$

(Phasengeschwindigkeit für eine Flachwasserwelle)

Bemerkung: c ist unabh. von λ!