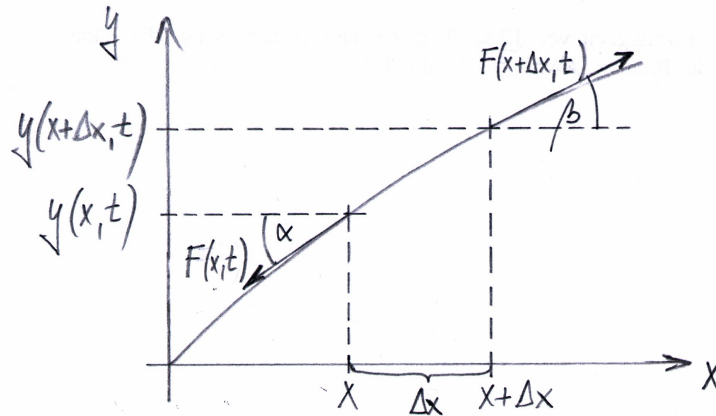


# Die Wellengleichung

## Herleitung

Die Wellengleichung beschreibt mathematisch/physikalisch die Ausbreitung von Wellen. Sie ist eine partielle Differentialgleichung<sup>1</sup>. Die Herleitung beschränkt sich zunächst auf eine Ortsdimension, wird am Beispiel einer Seilwelle durchgeführt, und im Anschluss verallgemeinert.

Wir betrachten eine in  $x$ -Richtung gespannte und in  $y$ -Richtung ausgelenkte Saite (reine Transversal-schwingung) mit konstanter Querschnittsfläche  $A$  und konstanter Dichte  $\rho$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  (siehe Skizze).



Die Auslenkung an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $y = y(x, t)$  bezeichnet. An einem Saitenelement der Länge  $\Delta x$  mit der Masse

$$\Delta m = \rho A \Delta x \quad (1)$$

greifen zu einem beliebigen Zeitpunkt die Kräfte  $F(x, t)$  im Winkel  $\alpha(x, t)$  am linken Ende und  $F(x + \Delta x, t)$  im Winkel  $\beta(x + \Delta x, t)$  am rechten Ende an (siehe Skizze).

In  $x$ -Richtung gilt, unter der Annahme, dass es in  $x$ -Richtung zu keinen „Verschiebungen“ kommt (nach dem 1. bzw. 2. Newtonschen Gesetz)

$$F(x + \Delta x, t) \cos(\beta(x + \Delta x, t)) - F(x, t) \cos(\alpha(x, t)) = 0. \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$F(x, t) \cos(\alpha(x, t)) = F(x + \Delta x, t) \cos(\beta(x + \Delta x, t)) = F_0, \quad (3)$$

wobei  $F_0$  die Zugkraft der nicht ausgelenkten Saite (in  $x$ -Richtung) bezeichnet.

Für die  $y$ -Richtung folgt für den Schwerpunkt  $x_S$  des Massenelements  $\Delta m$  nach dem 2. Newtonschen Gesetz

$$\Delta m \frac{\partial^2 y(x_S, t)}{\partial t^2} = \Delta m \ddot{y}(x_S, t) = F_y, \quad (4)$$

wobei  $F_y$  die Rückstellkraft in  $y$ -Richtung bezeichnet. Für diese gilt gemäß obiger Skizze

$$F_y = F(x + \Delta x, t) \sin(\beta(x + \Delta x, t)) - F(x, t) \sin(\alpha(x, t)). \quad (5)$$

<sup>1</sup>D.h., dass sie Ableitungen nach zwei unterschiedlichen Variablen (hier Ort und Zeit) enthält.

Setzt man (5) in (4) ein, erhält man

$$\Delta m \ddot{y}(x_S, t) = F(x + \Delta x, t) \sin(\beta(x + \Delta x, t)) - F(x, t) \sin(\alpha(x, t)). \quad (6)$$

Dividiert man diese Gleichung durch (3), so folgt

$$\frac{\Delta m}{F_0} \ddot{y}(x_S, t) = \frac{F(x + \Delta x, t) \sin(\beta(x + \Delta x, t))}{F(x + \Delta x, t) \cos(\beta(x + \Delta x, t))} - \frac{F(x, t) \sin(\alpha(x, t))}{F(x, t) \cos(\beta(x, t))}, \quad (7)$$

bzw. nach Vereinfachung

$$\frac{\Delta m}{F_0} \ddot{y}(x_S, t) = \tan(\beta(x + \Delta x, t)) - \tan(\alpha(x, t)). \quad (8)$$

Da der Tangens die Steigung angibt, folgt mit

$$\tan(\beta(x + \Delta x, t)) = \frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} = y'(x + \Delta x, t) \quad \text{und} \quad (9)$$

$$\tan(\alpha(x, t)) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = y'(x, t) \quad (10)$$

für Gleichung (8) unter gleichzeitiger Berücksichtigung von (1)

$$\frac{\rho A \Delta x}{F_0} \ddot{y}(x_S, t) = y'(x + \Delta x, t) - y'(x, t). \quad (11)$$

Dividiert man den letzten Zusammenhang durch  $\Delta x$  und führt man den Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  aus, gelangt man zu

$$\frac{\rho A}{F_0} \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ddot{y}(x_S, t)}_{=\ddot{y}(x,t)} = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y'(x + \Delta x, t) - y'(x, t)}{\Delta x}}_{=y''(x,t)}. \quad (12)$$

Multipliziert man das Ergebnis mit  $F_0$  und dividiert man durch  $\rho A$ , erhält man mit  $\sigma = \frac{F_0}{A}$  (=Spannung der nicht ausgelenkten Saite) die Wellengleichung

$$\ddot{y}(x, t) = \frac{\sigma}{\rho} y''(x, t). \quad (13)$$

Diese ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Eine Einheitenanalyse des Faktors auf der rechten Seite von (13) zeigt

$$\frac{[\sigma]}{[\rho]} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{\frac{kgm}{m^2s^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{m^2}{s^2}, \quad (14)$$

was dimensionsmäßig dem Quadrat einer Geschwindigkeit entspricht. Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit mit  $c$ , sie gibt für eine fortschreitende Welle deren Ausbreitungsgeschwindigkeit an. Es gilt somit

$$\ddot{y}(x, t) = c^2 y''(x, t) \quad (15a)$$

$$\text{mit } c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}. \quad (15b)$$

Unter Angabe entsprechender Randbedingungen

$$y(x = 0, t) = 0, \quad (16)$$

$$y(x = L, t) = 0, \quad (17)$$

für z.B. eine beidseitig eingespannte Saite, sowie geeigneter Anfangsbedingungen

$$y(x, t = 0) = y_0(x), \quad (18)$$

$$\dot{y}(x, t = 0) = v_0(x) \quad (19)$$

kann dieses sogenannte Rand-Anfangswertproblem gelöst werden<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen spricht man in diesem Zusammenhang von einer hyperbolischen PDG.

## Bemerkungen:

- Die Wellengleichung (15a) gilt in erster Näherung (d.h. bei entsprechender Linearisierung) allgemein (z.B. auch für Schallwellen<sup>3</sup>), es ändert sich lediglich der Zusammenhang für die Ausbreitungsgeschwindigkeit (15b).
- Für eine Verallgemeinerung auf drei Dimensionen mit  $y(x, y, z, t)$  ist die 2. Ableitung nach dem Ort auf der rechten Seite von (15a) durch den Laplace-Operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (20)$$

zu ersetzen<sup>4</sup>.

## Lösungen

Die folgenden beiden Abschnitte zeigen zwei prototypische Lösungen der Wellengleichung (15a).

### Fortschreitende Wellen

Wir suchen eine Funktion  $y(x, t)$ , bei der sich die zweite Ableitung nach dem Ort  $y''(x, t)$  und die zweite Ableitung nach der Zeit  $\ddot{y}(x, t)$  nur durch eine Konstante ( $c^2$ ) unterscheiden (und gleichzeitig den Anfangs- und den Randbedingungen genügt). Wir probieren

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx), \quad (21)$$

wobei  $y_0$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $k$  die Kreiswellenzahl bezeichnen.

**Übung:** Überprüfe durch Einsetzen in (15a), dass dieser Ansatz tatsächlich (eine mögliche) Lösung ist.

### Stehende Wellen

Stehende Wellen entstehen durch Überlagerung zweier entgegengerichteter Wellen gleicher Frequenz  $f$  bzw. Wellenlänge  $\lambda$  (und somit gleicher Kreisfrequenz  $\omega$  bzw. Kreiswellenzahl  $k$ )

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx), \quad (22)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(\omega t + kx). \quad (23)$$

Die resultierende Welle kann mittels des aus der Mathematik bekannten Sumpensatzes  $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$  angeschrieben werden. Es gilt

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx) + y_0 \sin(\omega t + kx) = 2y_0 \sin(\omega t) \cos(kx). \quad (24)$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Wellengleichung in ihrer hergeleiteten Form eine lineare PDG ist und daher das Superpositionsprinzip gilt, muss auch (24) eine Lösung von (15a) sein.

**Übung:** Überprüfe durch Einsetzen in (15a), dass der Ansatz (24) tatsächlich eine Lösung von (15a) ist.

---

<sup>3</sup>Die Herleitung hierfür ist ungleich aufwändiger und nicht „schultauglich“. Es gilt  $c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} = \sqrt{\kappa R_S T}$  (mit  $\kappa \dots$  Adiabatenkoeffizient,  $R \dots$  universelle Gaskonstante,  $M \dots$  molare Masse,  $T \dots$  absolute Temperatur bzw.  $R_S = \frac{R}{M} \dots$  spezifische Gaskonstante).

<sup>4</sup>Für zwei dimensionale Wellen wird z.B. die  $z$ -Koordinate weggelassen  $\Rightarrow y(x, y, t)$  bzw.  $\Delta_{2\text{-dim}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .