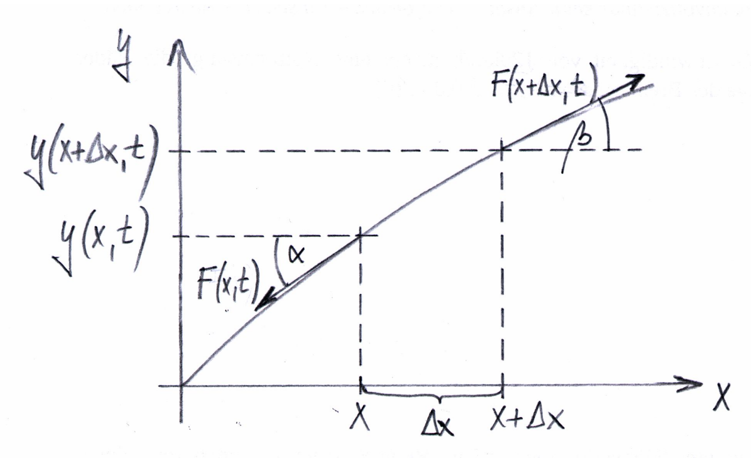
Die Wellengleichung

Herleitung

Die Wellengleichung beschreibt mathematisch/physikalisch die Ausbreitung von Wellen. Sie ist eine partielle Differentialgleichung[1]. Die Herleitung beschränkt sich zunächst auf eine Ortsdimension, wird am Beispiel einer Seilwelle durchgeführt, und im Anschluss verallgemeinert.

Wir betrachten eine in x-Richtung gespannte und in y-Richtung ausgelenkte Saite (reine Transversalschwingung) mit konstanter Querschnittsfläche A und konstanter Dichte ρ zu einem beliebigen Zeitpunkt t (siehe Skizze).



Die Auslenkung an der Stelle x zum Zeitpunkt t wird mit $y = y(x,t)$ bezeichnet. An einem Saitenelement der Länge Δx mit der Masse

$$\Delta m = \rho A \, \Delta x \tag{1}$$

greifen zu einem beliebigen Zeitpunkt die Kräfte $F(x,t)$ im Winkel $\alpha(x,t)$ am linken Ende und $F(x+\Delta x,t)$ im Winkel $\beta(x+\Delta x,t)$ am rechten Ende an (siehe Skizze).

In x-Richtung gilt, unter der Annahme, dass es in x-Richung zu keinen „Verschiebungen“ kommt (nach dem 1. bzw. 2. Newtonschen Gesetz)

$$F(x+\Delta x,t)\cos(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t)\cos(\alpha(x,t)) = 0. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$F(x,t)\cos(\alpha(x,t)) = F(x+\Delta x,t)\cos(\beta(x+\Delta x,t)) = F_0, \tag{3}$$

wobei F_0 die Zugkraft der nicht ausgelenkten Saite (in x-Richtung) bezeichnet.

Für die y-Richtung folgt für den Schwerpunkt x_S des Massenelements Δm nach dem 2. Newtonschen Gesetz

$$\Delta m \frac{\partial^2 y(x_S,t)}{\partial t^2} = \Delta m \, \ddot{y}(x_S,t) = F_y, \tag{4}$$

wobei F_y die Rückstellkraft in y-Richtung bezeichnet. Für diese gilt gemäß obiger Skizze

$$F_y = F(x+\Delta x,t)\sin(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t)\sin(\alpha(x,t)). \tag{5}$$

[1] D.h., dass sie Ableitungen nach zwei unterschiedlichen Variablen (hier Ort und Zeit) enthält.

Setzt man (5) in (4) ein, erhält man

$$\Delta m\, \ddot{y}(x_S,t) = F(x+\Delta x,t)\sin(\beta(x+\Delta x,t)) - F(x,t)\sin(\alpha(x,t)). \tag{6}$$

Dividiert man diese Gleichung durch (3), so folgt

$$\frac{\Delta m}{F_0}\,\ddot{y}(x_S,t) = \frac{F(x+\Delta x,t)\sin(\beta(x+\Delta x,t))}{F(x+\Delta x,t)\cos(\beta(x+\Delta x,t))} - \frac{F(x,t)\sin(\alpha(x,t))}{F(x,t)\cos(\alpha(x,t))}, \tag{7}$$

bzw. nach Vereinfachung

$$\frac{\Delta m}{F_0}\,\ddot{y}(x_S,t) = \tan(\beta(x+\Delta x,t)) - \tan(\alpha(x,t)). \tag{8}$$

Da der Tangens die Steigung angibt, folgt mit

$$\tan(\beta(x+\Delta x,t)) = \frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} = y'(x+\Delta x,t) \text{ und} \tag{9}$$

$$\tan(\alpha(x,t)) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = y'(x,t) \tag{10}$$

für Gleichung (8) unter gleichzeitiger Berücksichtigung von (1)

$$\frac{\rho A\,\Delta x}{F_0}\,\ddot{y}(x_S,t) = y'(x+\Delta x,t) - y'(x,t). \tag{11}$$

Dividiert man den letzten Zusammenhang durch Δx und führt man den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ aus, gelangt man zu

$$\frac{\rho A}{F_0}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\ddot{y}(x_S,t)}_{=\ddot{y}(x,t)} = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y'(x+\Delta x,t)-y'(x,t)}{\Delta x}}_{=y''(x,t)}. \tag{12}$$

Multipliziert man das Ergebnis mit F_0 und dividiert man durch ρA, erhält man mit $\sigma = \frac{F_0}{A}$ (=Spannung der nicht ausgelenkten Saite) die Wellengleichung

$$\ddot{y}(x,t) = \frac{\sigma}{\rho}\,y''(x,t). \tag{13}$$

Diese ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Eine Einheitenanalyse des Faktors auf der rechten Seite von (13) zeigt

$$\frac{[\sigma]}{[\rho]} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{\frac{kg\,m}{m^2 s^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{m^2}{s^2}, \tag{14}$$

was dimensionsmäßig dem Quadrat einer Geschwindigkeit entspricht. Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit mit c, sie gibt für eine fortschreitende Welle deren Ausbreitungsgeschwindigkeit an. Es gilt somit

$$\ddot{y}(x,t) = c^2\,y''(x,t) \tag{15a}$$

$$\text{mit } c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}. \tag{15b}$$

Unter Angabe entsprechender Randbedingungen

$$y(x=0,t) = 0, \tag{16}$$

$$y(x=L,t) = 0, \tag{17}$$

für z.B. eine beidseitig eingespannte Saite, sowie geeigneter Anfangsbedingungen

$$y(x,t=0) = y_0(x), \tag{18}$$

$$\dot{y}(x,t=0) = v_0(x) \tag{19}$$

kann dieses sogenannte Rand-Anfangswertproblem gelöst werden[2].

[2]In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen spricht man in diesem Zusammenhang von einer hyperbolischen PDG.

Bemerkungen:

- Die Wellengleichung (15a) gilt in erster Näherung (d.h. bei entsprechender Linearisierung) allgemein (z.B. auch für Schallwellen[3]), es ändert sich lediglich der Zusammenhang für die Ausbreitungsgeschwindigkeit (15b).

- Für eine Verallgemeinerung auf drei Dimensionen mit $y(x, y, z, t)$ ist die 2. Ableitung nach dem Ort auf der rechten Seite von (15a) durch den Laplace-Operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{20}$$

  zu ersetzen[4].

Lösungen

Die folgenden beiden Abschnitte zeigen zwei prototypische Lösungen der Wellengleichung (15a).

Fortschreitende Wellen

Wir suchen eine Funktion $y(x, t)$, bei der sich die zweite Ableitung nach dem Ort $y''(x, t)$ und die zweite Ableitung nach der Zeit $\ddot{y}(x, t)$ nur durch eine Konstante (c^2) unterscheiden (und gleichzeitig den Anfangs- und den Randbedingungen genügt). Wir probieren

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx), \tag{21}$$

wobei y_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und k die Kreiswellenzahl bezeichnen.

Übung: Überprüfe durch Einsetzen in (15a), dass dieser Ansatz tatsächlich (eine mögliche) Lösung ist.

Stehende Wellen

Stehende Wellen entstehen durch Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen gleicher Frequenz f bzw. Wellenlänge λ (und somit gleicher Kreisfrequenz ω bzw. Kreiswellenzahl k)

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx), \tag{22}$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(\omega t + kx). \tag{23}$$

Die resultierende Welle kann mittels des aus der Mathematik bekannten Summensatzen $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ angeschrieben werden. Es gilt

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx) + y_0 \sin(\omega t + kx) = 2y_0 \sin(\omega t)\cos(kx). \tag{24}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Wellengleichung in ihrer hergeleiteten Form eine lineare PDG ist und daher das Superpositionsprinzip gilt, muss auch (24) eine Lösung von (15a) sein.

Übung: Überprüfe durch Einsetzen in (15a), dass der Ansatz (24) tatsächlich eine Lösung von (15a) ist.

---

[3]Die Herleitung hierfür ist ungleich aufwändiger und nicht „schultauglich“. Es gilt $c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} = \sqrt{\kappa R_S T}$ (mit $\kappa \ldots$ Adiabatenkoeffizient, $R \ldots$ universelle Gaskonstante, $M \ldots$ molare Masse, $T \ldots$ absolute Temperatur bzw. $R_S = \frac{R}{M} \ldots$ spezifische Gaskonstante).

[4]Für zwei dimensionale Wellen wird z.B. die z-Koordinate weggelassen $\Rightarrow y(x, y, t)$ bzw. $\Delta_{\text{2-dim}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.