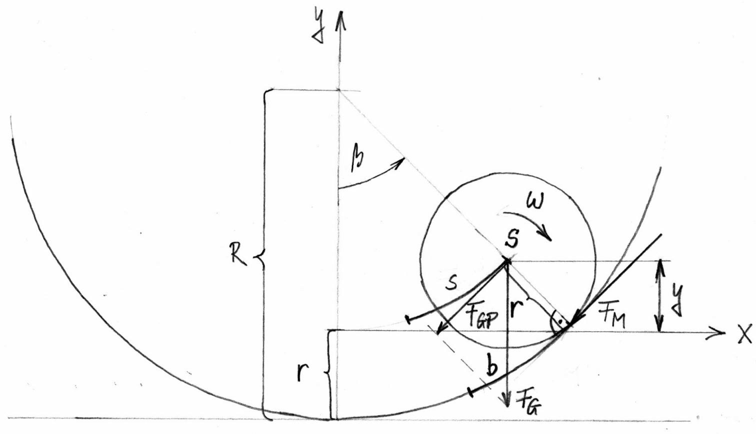
Der Zylinder in der Rinne

Der vorliegende Artikel beschreibt ohne Berücksichtigung der Reibung das Rollen eines Zylinders in einer kreisförmigen Rinne mit Radius R. Auf drei verschiedene Arten wird die Bewegungsgleichung der entstehenden Schwingung hergeleitet: Bei der ersten Methode wird auf die Betrachtungsweise von Lagrange zurückgegriffen, die beiden anderen Methoden folgen der Betrachtungsweise von Newton. Dazu wird die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt S des als homogen angenommenen Zylinders (Zylinderradius r) und für den Kontaktpunkt A (korrekter die Kontaktstrecke) als Bezugspunkt für die Herleitungen herangezogen (siehe Skizze 1). Im letzten Abschnitt wird die Bewegungsgleichung linearisiert und für diesen Fall eine Formel für die Periodendauer bzw. Frequenz der periodischen Bewegung hergeleitet.

Skizze 1:



1 Vorüberlegung – Rollbedingung

Gemäß Skizze 1 gilt mit $\beta = \beta(t)$ für den vom Schwerpunkt des Zylinders zurückgelegten Weg

$$s = (R - r)\beta, \tag{1}$$

und für „abgerollte“ Bogenlänge

$$b = r\varphi. \tag{2}$$

Da diese beiden Größen gleich groß sein müssen, d.h. $s = b$, gilt

$$s = r\varphi = (R - r)\beta. \tag{3}$$

Die erste Ableitung nach der Zeit liefert die Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$v = r\omega = (R - r)\dot{\beta}, \tag{4}$$

wobei $\omega = \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Zylinders bezeichnet. Die nochmalige Ableitung nach der Zeit liefert die Beschleunigung a des Schwerpunktes

$$a = r\alpha = (R - r)\ddot{\beta}, \tag{5}$$

wobei $\alpha = \dot{\omega}$ die Winkelbeschleunigung der Drehung des Zylinders bezeichnet. Daraus ergeben sich die Rollbedingungen

$$\varphi = \frac{R - r}{r}\beta, \tag{6}$$

$$\omega = \frac{R - r}{r}\dot{\beta} \text{ und} \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{R - r}{r}\ddot{\beta}. \tag{8}$$

2 Betrachtung nach Lagrange

Um den Lagrange-II-Formalismus zu bemühen, müssen zuerst die kinetische und die potentielle Energie in Abhängigkeit von der gewählten (verallgemeinerten) Koordinate β formuliert werden. Für die kinetische Energie gilt

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2, \tag{9}$$

wobei m die Masse und I_S das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes bezeichnen. Durch Einsetzen von $v = (R-r)\dot{\beta}$ (siehe (4)), der Beziehung (7) und $I_S = \frac{1}{2}mr^2$ für das Trägheitsmoment des Zylinders, erhält man

$$E_k = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\beta}^2, \tag{10}$$

bzw. vereinfacht

$$E_k = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\beta}^2. \tag{11}$$

Für die potentielle Energie gilt mit ($g\ldots$ Erdbeschleunigung)

$$E_p = mgy, \tag{12}$$

bzw. mit $y = (R-r)(1-\cos(\beta))$ gemäß Skizze 1

$$E_p = mg(R-r)(1-\cos(\beta)). \tag{13}$$

Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion

$$L = E_k - E_p = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\beta}^2 - mg(R-r)(1-\cos(\beta)). \tag{14}$$

Mit den entsprechenden Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\beta}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\beta} \text{ und} \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta} = -mg(R-r)\sin(\beta) \tag{17}$$

für die Lagrange-Gleichung (=Bewegungsgleichung), erhält man

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial\beta} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\beta} - (-mg(R-r)\sin(\beta)) = 0, \tag{18}$$

bzw. nach Vereinfachung/Umformung

$$\ddot{\beta} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin(\beta) = 0. \tag{19}$$

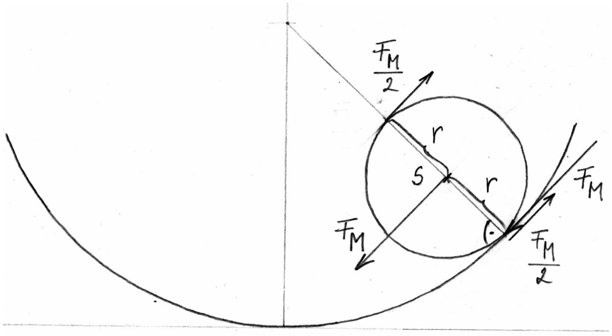
3 Betrachtung nach Newton bezüglich des Schwerpunktes

Gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz gilt für die Bewegung des Zylinderschwerpunktes

$$ma = -F_{GP} - F_M, \tag{20}$$

wobei F_{GP} die Parallelkomponente der Gewichtskraft $F_G = mg$ und F_M die das Drehmoment M verursachende Kraft bezeichnen. Wie man aus Skizze 1 entnehmen kann, greift F_M nicht im Schwerpunkt des Zylinders an. Folgende Argumentation belegt jedoch, warum in S ebenfalls eine Kraft der Größe F_M wirkt:

Skizze 2:



Die beiden zusätzlichen Kräfte $\frac{F_M}{2}$ und die zusätzliche Kraft F_M (ausgehend von S, siehe Skizze 2) verändern weder das am Zylinder wirkende Drehmoment, da $M = F_M r = \frac{F_M}{2} r + \frac{F_M}{2} r$, noch die Bewegung des Schwerpunktes S selbst, da $-F_M + \frac{F_M}{2} + \frac{F_M}{2} = 0$ gilt. Es wird jedoch sichtbar, dass im Schwerpunkt S die Kraft $-F_M$ angreift.

Setzt man in (20) für $F_{GP} = mg\sin(\beta)$ und für $F_M = \frac{M}{r} = \frac{I_S\alpha}{r} = \frac{\frac{1}{2}mr^2\alpha}{r} = \frac{1}{2}mr\alpha$ ein, erhält man

$$ma = -mg\sin(\beta) - \frac{1}{2}mr\alpha. \tag{21}$$

Substituiert man für α die Beziehung (8) und für $a = (R-r)\ddot{\beta}$ (siehe (5)), gelangt man zu

$$m(R-r)\ddot{\beta} = -mg\sin(\beta) - \frac{1}{2}mr\frac{R-r}{r}\ddot{\beta}, \tag{22}$$

woraus durch Umformung bzw. Vereinfachung die gesuchte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\beta} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin(\beta) = 0 \tag{23}$$

folgt.

4 Betrachtung nach Newton bezüglich der Kontaktstrecke

In Analogie zum 2. Newtonschen Gesetz gilt für die Rotation bezüglich der Kontaktstrecke A

$$I_A\alpha = -F_{GP}\,r = -mgr\sin(\beta), \tag{24}$$

wobei I_A das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich der Kontaktstrecke bezeichnet. Für dieses gilt gemäß dem Satz von Steiner $I_A = I_S + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$. Setzt man weiters (8) in die Bewegungsgleichung ein, erhält man

$$\frac{3}{2}mr^2(R-r)\ddot{\beta} = -mgr\sin(\beta). \tag{25}$$

Durch Umformung bzw. Vereinfachung erhält man wieder

$$\ddot{\beta} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin(\beta) = 0. \tag{26}$$

Die drei verschiedenen Ansätze liefern alle dieselbe Bewegungsgleichung, siehe (19), (23) und (26). ☺

5 Lösung der (linearisierten) Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (19), (23) bzw. (26) ist eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die nur numerisch gelöst werden kann. Um eine Formel für die Frequenz bzw. Periodendauer herleiten zu können, muss diese linearisiert werden. Für hinreichend kleine Auslenkungen β gilt in erster Näherung $\sin(\beta) \approx \beta$, womit sich die Gleichung zu

$$\ddot{\beta} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\beta = 0 \tag{27}$$

vereinfacht. Diese linearisierte Bewegungsgleichung hat die Bauform der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, woraus für die Kreisfrequenz ω_0

$$\omega_0^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R-r} \tag{28}$$

folgt[1].

Mit den bekannten Zusammenhängen $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ können die Frequenz f und die Periodendauer T wie folgt angeschrieben werden

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}, \tag{29}$$

bzw.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R-r}{g}}. \tag{30}$$

[1]Die mathematische Theorie hierzu kann x-fach im Netz nachgelesen werden.