Das lineare Magnetpendel – ein Modellierungsversuch



Dr.rer.nat. Dr.techn. Martin Tutz

Jänner 2019

Einleitung

Im vorliegenden Artikel soll das lineare Magnetpendel (siehe folgende Abbildung¹) nach einer Idee von DI Stefan Lorbek, als Beispiel für eine Schwingung mit einem nichtlinearen Kraftgesetz, physikalisch modelliert werden.



Das Pendel besteht aus einem durchsichtigen bodenseitig verschlossenen Rohr² mit einem Magneten am unteren Ende und einer Spule, die etwa in der Höhe der Ruhelage des schwingenden Magneten um das Rohr gewickelt ist. Der zweite Magnet wird von oben mit der abstoßenden Seite in das Rohr fallen gelassen, worauf dieser im Rohr auf und ab schwingt. Dabei werden in der Spule Spannungsimpulse induziert (siehe folgende Abbildung).



¹Mein Dank gilt Mag. Peter Pollak für die Bereitstellung sämtlicher Fotos in diesem Artikel.

 $^2 \mathrm{Das}$ Rohr muss so dünn sein, dass sich keiner der beiden Magnete umdrehen kann wodurch eine anziehende magnetische Kraft entstehen würde.

Interessant erscheint, dass die Amplitude der Impulse linear und nicht wie bei einem harmonischen Oszillator mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung exponentiell abnimmt. Dies soll im vorliegenden Artikel physikalisch mathematisch begründet bzw. nachgerechnet werden.

Im ersten Teil wird die Bewegungsgleichung hergeleitet, welche im zweiten Abschnitt (numerisch) gelöst wird. Anschließend wird der Verlauf der in der Spule induzierten Spannung berechnet und mit dem experimentell bestimmten verglichen.

1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Ausgehend von dieser Skizze,



kann gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz (m $a=\sum_i F_i)$ folgende Bewegungsgleichung aufgestellt werden³

$$m \ddot{y} = F_M - \operatorname{sgn}(\dot{y}) \left(F_R + F_L\right) - F_G,\tag{1}$$

wobei F_M die magnetische Kraft, F_R die Reibungskraft zwischen Magnet und Rohr, F_L die Luftwiderstandskraft und F_G die Schwerkraft bezeichnen.

Die Signum-Funktion $sgn(\dot{y})$ ist notwendig, damit die beiden berücksichtigten Reibungskräfte stets gegen die aktuelle Bewegungsrichtung zeigen.

³Der besseren Lesbarkeit wegen wird auf die Angabe (t), wie z.B. bei y = y(t), bei allen zeitabhängigen Größen verzichtet.

Setzt man die entsprechenden Gesetze für die jeweiligen Kräfte ein, erhält man

$$m \ddot{y} = \underbrace{k \frac{p_1 p_2}{y^2}}_{=F_M} -\operatorname{sgn}(\dot{y}) \Big(\underbrace{\mu F_N}_{=F_R} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho_L c_w A \dot{y}^2}_{=F_L} \Big) - \underbrace{mg}_{=F_G}, \tag{2}$$

wobei m die Masse des schwingenden Magneten, k eine die magnetische Feldkonstante μ_0 beinhaltende Konstante, p_1 und p_2 die Polstärken der Magnete, y = y(t) den Abstand der beiden Magnete, μ den Reibungskoeffizienten zwischen Magnet und Rohr, F_N die Normalkraft zwischen Magnet und Rohr, ρ_L die Dichte der Luft, c_w den Widerstandsbeiwert des Magneten, A die Schattenfläche des Magneten und g die Erdbeschleunigung bezeichnen.

Damit man diese gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung für geeignete Anfangswerte numerisch⁴ lösen kann, ist es notwendig das Produkt $k p_1 p_2$ zu bestimmen. Dies kann wie folgt bewerkstelligt werden (siehe Abbildung).



Am Ende einer Versuchsdurchführung gilt im eingeschwungenen Zustand, d.h. $y = y_G$ (Index *G* für Gleichgewichtszustand) gemäß dem 1. Newtonschen Gesetz für die Beträge der Kräfte (F_G =Gewichtskraft des Magneten, $F_{M,G}$ =magnetische Kraft im Gleichgewichtszustand)

$$F_G = F_{M,G} \tag{3}$$

$$mg = k \frac{p_1 p_2}{y_G^2}.$$
 (4)

Kürzt man $k p_1 p_2$ mit einer neu eingeführten Konstante C ab, erhält man

$$C \coloneqq k \, p_1 \, p_2 = m \, g \, y_G^2, \tag{5}$$

hat so die Bestimmung der drei Parameter "umschifft" und kann C in die Berechnung einsetzen. Die einzigen zu messenden Größen zur Bestimmung von C sind y_G und m, was rein technisch gesehen keine Schwierigkeit darstellt.

2 Numerische Lösung der Bewegungsgleichung

Für die numerische Lösung von (2) wird diese durch Division durch m umgeformt auf

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} \left(\frac{C}{y^2} - \text{sgn}(\dot{y}) \left(\mu F_N + \frac{1}{2} \rho_L c_w A \dot{y}^2 \right) - mg \right)$$
(6)

$$=: f(y, \dot{y}) \tag{7}$$

⁴Eine analytische Lösung ist aufgrund der Nichtlinearität der Bewegunsgleichung nicht möglich.

und die rechte Seite mit $f(y, \dot{y})$ abgekürzt. Da (2) bzw. (7) Ordnung 2 hat, benötigt man zur Lösung 2 Startwerte

$$y(t=0) = y_0 \text{ und} \tag{8}$$

$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0.$$
 (9)

Um die Rückführung der zu lösenden Differentialgleichung 2. Ordnung auf ein System von 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung zu vermeiden, wird der 1. Schritt als Taylor-Startschritt ausgeführt. Dazu wird die 2. Ableitung von y durch einen geeigneten Differenzenquotienten mit hinreichend kleinem Δt approximiert. Man erhält, diskretisiert auf einem äquidistanten Gitter mit der Schrittweite Δt , d.h. $t_i = i\Delta t$, i = 0, 1, 2, ... N

$$\ddot{y}(t_0) \approx \frac{\frac{y_1 - y_0}{\Delta t} - \dot{y}_0}{\frac{\Delta t}{2}},\tag{10}$$

bzw. eingesetzt in (7) und umgeformt auf y_1

$$y_1 = y_0 + \Delta t \, \dot{y}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \, f(y_0, \dot{y}_0). \tag{11}$$

Für $i \ge 2$ muss zusätzlich die 1. Ableitung für die Berechnung der Reibung diskretisiert werden. Damit die Differentialgleichung mit einem expliziten Verfahren gelöst werden kann, wird die 1. Ableitung durch den rückwärtigen Differenzenquotienten approximiert

$$\dot{y}(t_{i-1}) \approx \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{\Delta t}.$$
 (12)

Für die 2. Ableitung gilt

$$\ddot{y}(t_{i-1}) \approx \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta t^2}$$
 (13)

und eingesetzt in (7) erhält man

$$y_{i} = 2y_{i-1} - y_{i-2} + \Delta t^{2} f\left(y_{i-1}, \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{\Delta t}\right).$$
(14)

3 Berechnung der induzierten Spannung

Dieser Abschnitt erklärt, wie nach dem Lösen der Bewegungsgleichung (siehe oben) die in der Spule induzierte Spannung U berechnet werden kann. Die Spule befindet sich in der Höhe y_G . Die Ortsfunktion y = y(t) des schwingenden Magneten ist (diskret) bereits bekannt. Die Form des *B*-Feldes (*B*=magnetische Flussdichte) kann mittels

$$B(z) = \frac{B_m}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (\frac{h}{2} + z)^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{h}{2})^2}} \right)$$
(15)

berechnet werden, wobei B_m ein Parameter für die Stärke des Magneten ist. Weiters bezeichnen h die Höhe und R den Radius des Magneten sowie z den Abstand vom Magneten. Die Formel ist eine um die halbe Magnetlänge verschobene Version der Formel von supermagnete.at ⁵. Der Plot der *B*-Funktion sieht wie folgt aus.

⁵https://www.supermagnete.at/faq/Wie-berechnet-man-die-magnetische-Flussdichte# formel-fr-flussdichte-zylindermagnet, Herleitung siehe: https://www.researchgate.net/ publication/262707508_Alternative_method_to_calculate_the_magnetic_field_of_permanent_ magnets_with_azimuthal_symmetry



Wir substituieren $z = y - y_G$ in (15), und setzen die gesamte Funktion in das Induktionsgesetz ein. Man erhält mit dem magnetsichen Fluss Φ , der Anzahl der Windungen N_W und Querschnittsfläche der Spule A_S

$$U = -N_W \frac{d\Phi}{dt} \tag{16}$$

$$= -N_W A_S \frac{dB}{dt} \tag{17}$$

$$= -N_W A_S \frac{d}{dt} \left(\frac{B_m}{2} \left(\frac{\frac{\hbar}{2} + y - y_G}{\sqrt{R^2 + (\frac{\hbar}{2} + y - y_G)^2}} - \frac{y - y_G - \frac{\hbar}{2}}{\sqrt{R^2 + (y - y_G - \frac{\hbar}{2})^2}} \right) \right)$$
(18)

Diskretisiert kann man die einzelnen U_i -Werte für die zugehörigen y_i (siehe voriger Abschnitt) wie folgt berechnen

$$B_{i} = \frac{B_{m}}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + y_{i} - y_{G}}{\sqrt{R^{2} + (\frac{h}{2} + y_{i} - y_{G})^{2}}} - \frac{y_{i} - y_{G} - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^{2} + (y_{i} - y_{G} - \frac{h}{2})^{2}}} \right),$$
(19)

$$\Rightarrow U_i = -N_W A_S \frac{B_i - B_{i-1}}{\Delta t}.$$
(20)

Simulation

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse einer Simulation den Messungen eines konkreten Versuchs gegenübergestellt. Die (teilweise geschätzten) Parameter der Versuchsanordnung können dem Quellcode aus Anhang A entnommen werden.

Die folgenden Diagramme zeigen die berechnete *y*-Koordinate des schwingenden Magneten aufgetragen über der Zeit für einen Versuch,



sowie den zugehörigen Geschwindigkeitsverlauf (schon hier erkennt man, dass die Höhe der Spannungsimpulse linear abnimmt),



und die in der Spule induzierte Spannung.



Zum Vergleich ein Foto einer Detailansicht der gemessenen Spannungsimpulse.



4 Fazit

Die Übereinstimmung der Form der Spannungsimpulse, sowie die lineare Abnahme der Amplitude wird zufriedenstellend wiedergegeben. Diese lineare Abnahme legt nahe, dass der führende Term bei der Berechnung der Gesamtreibungskraft jene von der Geschwindigkeit unabhängige Kraft F_R ist, welche die Reibung zwischen Magnet und Rohr beschreibt.

A Anhang – Quellcode des Maxima-Programms

Es folgt der Quellcode des Maxima-Programms zur Lösung der Bewegungsgleichung (6).

```
(%i1) kill(all);
(%00) done
Mathematische Modellierung des Versuchs 'Schwingender Magnet', Mariazell 2018
Erfinder des Experiments: Stefan Lorbek
Programmautor: Martin Tutz
Alles Einheiten in SI!
(%i1) ratprint:false;
(ratprint) false
 Exponent im Kraftgesetz F=Const.*p1*p2/r^e mit e=2 in Analogie zum
Coulombschen Kraftgesetz, wobei p1 und p2 die Polstärken
 der Magneten bezeichnen
(%i2) e:2;
(e) 2
Masse des schwingenden Magneten
(%i3) m:0.01;
(m) 0.01
Erdbeschleunigung
(%i4) g:9.81;
(g) 9.81
Reibungskoeffizient zwischen Magnet und Rohr
(%i5) mu:1.5;
(mu) 1.5
Normalkraft
(%i6) FN:m*g/10;
(FN) 0.00981
 Gleichgewichtslage des Magneten (ca. 3 cm über dem anderen Magneten)
(%i7) xggw:0.03;
(xggw) 0.03
Dimensionierung der Konstanten C=k*p1*p2 im Kraftgesetz. Damit wird die
Rechnung an das tatsächliche Experiment angepasst und die Ermittlung der
 Polstärken sozusagen 'umschifft'.
(%i8) C:m*g*xggw^e;
(C) 8.8290000000001*10<sup>-5</sup>
Plot der wirkenden Kraft
(%i9) wxplot2d([C/x^e], [x,0.01,0.2])$
(%t9) (Bild)
Widerstandsbeiwert
(%i10) cw:0.8;
(cw) 0.8
Dichte der Luft
(%i11) rho:1.25;
(rho) 1.25
Radius des Magneten
(%i12) R:0.003;
```

```
(R) 0.003
Dicke des Magneten
(%i13) D:0.01;
(D) 0.01
Schattenfläche des Magneten
(%i14) A:float(R^2*%pi);
(A) 2.8274333882308137*10<sup>-5</sup>
Anfangswerte
(%i15) v[0]:0;
(%015) 0
(%i16) x[0]:0.2;
(%016) 0.2
Integrationsdauer
(%i17) tend:2.;
(tend) 2
Zeitschrittweite
(%i18) deltat:0.0001;
(deltat) 1.0*10<sup>-4</sup>
Anzahl der Iterationen
(%i19) N:round(tend/deltat);
(N) 20000
Startschritt = expl. Taylorschritt (notwendig, da die DGL Ordnung 2 hat)
(%i20) x[1]:x[0]+v[0]*deltat+deltat^2/2/m*(C/x[0]^e-signum(v[0])
 *(mu*FN+0.5*cw*rho*A*v[0]^2)-m*g);
(%o20) 0.19999995205362
 Iteration
(%i21) for i:2 thru N do block(
   x[i]:2*x[i-1]-x[i-2]+deltat<sup>2</sup>/m*((C/x[i-1]<sup>e</sup>)
   -signum((x[i-1]-x[i-2])/(deltat))
   *(mu*FN+0.5*cw*rho*A*((x[i-1]-x[i-2])/deltat)^2)
        -m*g),
   if mod(i,10000)=0 then display(i)
);
i=10000
i=20000
(%o21) done
Plot der x-Werte
(%i22) xwerte:makelist([j*deltat,x[j]],j,0,N)$
(%i23) wxplot2d([discrete,xwerte])$
(%t23) (Bild)
(%i24) plot2d([discrete,xwerte],[ylabel,"y-Koordinate in m"],
                        [xlabel,"Zeit t in s"],
                        [gnuplot_term,png],[gnuplot_out_file,
        "/home/martin/Mathe-Physik/Schwingender-Magnet/y-Verlauf.jpeg"]);
(%o24) "/home/martin/maxout.gnuplot_pipes
/home/martin/Mathe-Physik/Schwingender-Magnet/y-Verlauf.jpeg"
 Plot der Geschwindigkeitsfunktion
```

```
(%i25) for i:1 thru N do block(
   v[i]:(x[i]-x[i-1])/deltat
);
(%o25) done
(%i26) vwerte:makelist([j*deltat,v[j]],j,0,N)$
(%i27) wxplot2d(/*[[discrete,xwerte],*/[discrete,vwerte]/*]*/)$
(%t27) (Bild)
(%i28) plot2d([discrete,vwerte],[ylabel,"Geschwindigkeit v in m/s"],
                       [xlabel,"Zeit t in s"],
                       [gnuplot_term,png],[gnuplot_out_file,
        "/home/martin/Mathe-Physik/Schwingender-Magnet/v-Verlauf.jpeg"]);
(%o28) "/home/martin/maxout.gnuplot_pipes
/home/martin/Mathe-Physik/Schwingender-Magnet/v-Verlauf.jpeg"
 Anzahl der Windungen der Spule
(%i29) NW:5;
(NW) 5
Fläche der Spule
(%i30) As:float((0.015/2)^2*%pi);
(As) 1.7671458676442585*10<sup>-4</sup>
 Remanenz-Flussdichte
(%i31) Br:1.;
(Br) 1
Berechnung der Flussdichte in der Spule
(%i32) for i:0 thru N do block(
   Bges[i]:Br/2*((D/2+(x[i]-xggw))/(sqrt(R^2+(D/2+(x[i]-xggw))^2))
              -(x[i]-xggw-D/2)/sqrt(R^2+(x[i]-xggw-D/2)^2))
);
(%o32) done
Berechnung der ind. Spannung (Ind.-Gesetz)
(%i33) for i:1 thru N do block(
    Uind[i]:-NW*As*(Bges[i]-Bges[i-1])/deltat
);
(%o33) done
Plot der ind. Spannung (das Minus bei der Erzeugung der Wertepaare
 ist nur deswegen eingefügt, damit der Plot zur Polung des Oszis passt)
(%i34) Uwerte:makelist([j*deltat,-Uind[j]],j,1,N)$
(%i35) wxplot2d([discrete,Uwerte])$
(%t35) (Bild)
(%i36) plot2d([discrete,Uwerte],[ylabel,"Spannung U in V"],
                       [xlabel,"Zeit t in s"],
                       [gnuplot_term,png],[gnuplot_out_file,
        "/home/martin/Mathe-Physik/Schwingender-Magnet/U-Verlauf.jpeg"]);
(%o36) "/home/martin/maxout.gnuplot_pipes
/home/martin/Mathe-Physik/Schwingender-Magnet/U-Verlauf.jpeg"
```