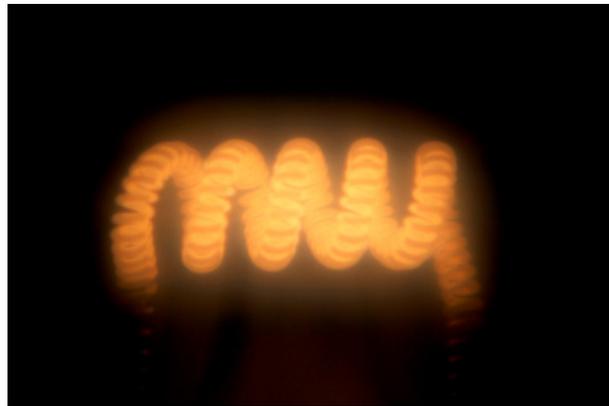


# Das inverse Magnetpendel – ein Modellierungsversuch



Dr.rer.nat. Dr.techn. Martin Tutz

Jänner 2019

# Problemstellung und Zielsetzung

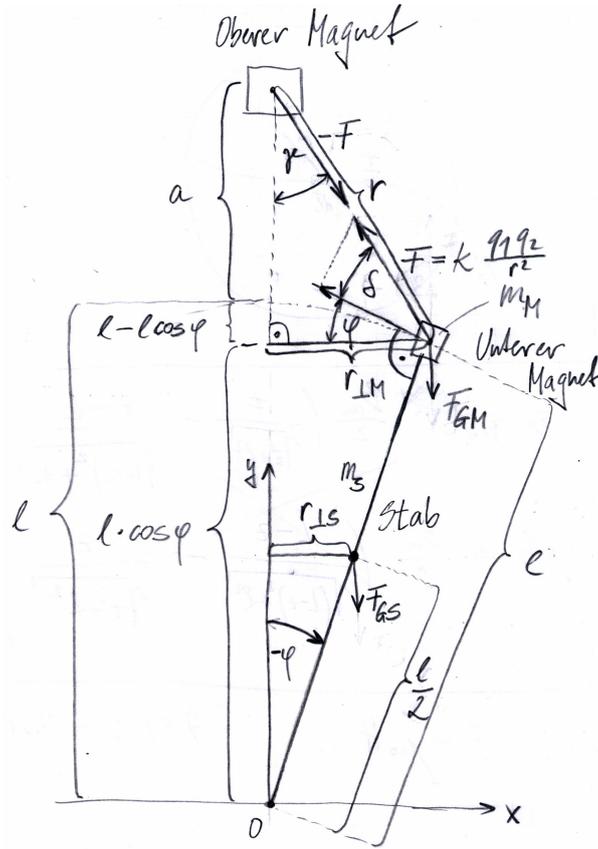
Im vorliegenden Artikel soll das inverse Magnetpendel (siehe Abbildung) in 2D als Beispiel für eine anharmonische Schwingung physikalisch modelliert werden. Dieses besteht aus 2 Holzstäbchen mit je einem mit einem Klebestreifen fixierten Magneten.



Im ersten Teil wird die Bewegungsgleichung hergeleitet, welche im zweiten Abschnitt (numerisch) gelöst wird. Die daraus bestimmbare (mittlere) Periodendauer wird mit der experimentell bestimmbaren verglichen. Im dritten Abschnitt wird der Grenzwinkel für den Abriss der Schwingungsbewegung berechnet und mit dem gemessenen „Kippwinkel“ im statischen Fall verglichen.

# 1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Ausgehend von dieser Skizze,



kann mit  $I \ddot{\varphi} = \sum_i M_i$  ( $M_i \dots$  wirkende Drehmomente) als rotatorisches Analogon zum 2. Newtonschen Gesetz folgende Bewegungsgleichung aufgestellt werden<sup>1</sup>

$$-I_{ges} \ddot{\varphi} = \underbrace{D \dot{\varphi}}_{\text{Dämpfungs-Term}} - \underbrace{F_{GS} r_{\perp S}}_{\text{Kippmoment des Stabes}} - \underbrace{F_{GM} r_{\perp M}}_{\text{Kippmoment des Magneten}} + \underbrace{k \frac{p_1 p_2}{r^2} l \cos(\delta)}_{\text{Standmoment, verursacht durch die magnetische Kraft}} \quad (1)$$

wobei  $I_{ges}$  das Gesamtträgheitsmoment bezeichnet. Dieses setzt sich aus dem Trägheitsmoment des Stabes  $I_S$  und dem Trägheitsmoment des Magneten  $I_M$  zusammen.  $D$  gibt die Stärke der Dämpfung (proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ ) wieder.  $F_{GS}$  steht für die Gewichtskraft des Stabes,  $r_{\perp S}$  für den Normalabstand der Stabgewichtskraft bezüglich der Drehachse,  $F_{GM}$  für die Gewichtskraft des Magneten und  $r_{\perp M}$  für den Normalabstand der Magnetgewichtskraft bezüglich der Drehachse. Weiters bezeichnet  $k$  eine Konstante, die die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  beinhaltet,  $p_1$  und  $p_2$  bezeichnen die jeweiligen Polstärken<sup>2</sup> der beiden Magnete und  $r$  den Abstand zwischen diesen beiden.  $l$  steht für die Pendellänge und für die beiden Winkel  $\gamma$  sowie  $\delta$  wird auf die obige Skizze verwiesen. Das Minus auf der linken Seite von (1) ist wegen der Auslenkung im Uhrzeigersinn notwendig. Auf der rechten Seite drehen die ersten beiden Teildrehmomente ebenfalls im Uhrzeigersinn, der letzte Term dagegen.

<sup>1</sup>Der besseren Lesbarkeit wegen wird auf die Angabe  $(t)$ , wie z.B. bei  $\varphi = \varphi(t)$ , bei allen zeitabhängigen Größen verzichtet.

<sup>2</sup>„Etwas“ antiquierte Betrachtung aber zweckmäßig ☺!

Für das Gesamtträgheitsmoment  $I_{ges}$  bzw. die zugehörigen Teilträgheitsmomente bezüglich der Drehachse gilt

$$I_S = \int_0^l \tilde{r}^2 dm_S. \quad (2)$$

Da man die Masse  $\Delta m_S$  eines Stababschnittes  $\Delta \tilde{r}$  mit der linearen Massendichte des Stabes  $\rho_S$  durch  $\Delta m_S = \rho_S \Delta \tilde{r}$  darstellen kann, folgt daraus  $dm_S = \rho_S d\tilde{r}$  und somit

$$I_S = \int_0^l \tilde{r}^2 \rho_S d\tilde{r} = \rho_S \left[ \frac{\tilde{r}^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} \rho_S l^3 = \frac{1}{3} m_S l^2. \quad (3)$$

Da der Magnet am Ende Stabes als punktförmig angenommen wird, folgt für sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse

$$I_M = m_M l^2, \quad (4)$$

wobei  $m_M$  die Masse des Magneten bezeichnet. Für das Gesamtträgheitsmoment gilt somit

$$I_{ges} = \frac{1}{3} m_S l^2 + m_M l^2. \quad (5)$$

Für die Terme auf der rechten Seite von (1) können folgende Zusammenhänge eingesetzt werden (siehe Skizze)

$$-F_{GS} r_{\perp S} = -m_S g \frac{l}{2} \sin(\varphi), \quad (6)$$

wobei  $m_S$  die Masse des Stabes,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $\frac{l}{2}$  den Abstand des Stabschwerpunktes von der Drehachse bezeichnen. Analog folgt für den 3. Term der rechten Seite

$$-F_{GM} r_{\perp M} = -m_M g l \sin(\varphi). \quad (7)$$

Im 4. Term auf der rechten Seite von (1) kann der Abstand  $r$  gemäß der Skizze durch

$$r = \sqrt{(a + l - l \cos(\varphi))^2 + (l \sin(\varphi))^2} \quad (8)$$

und der Winkel  $\gamma$  (siehe Skizze) durch

$$\gamma = \arctan\left(\frac{l \sin(\varphi)}{a + l - l \cos(\varphi)}\right) \quad (9)$$

angeschrieben werden.  $a$  ist hierbei der Abstand der beiden Magnete für  $\varphi = 0$ .

Für den Winkel  $\delta$  folgt somit

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\pi}{2} - \gamma - \varphi \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l \sin(\varphi)}{a + l - l \cos(\varphi)}\right) - \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Setzt man (5) bis (10) in (1) ein, erhält man eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die für geeignete Anfangswerte numerisch gelöst werden kann<sup>3</sup>. Man erhält

---

<sup>3</sup>Eine analytische Lösung ist aufgrund der Nichtlinearität nicht möglich.

umgeformt

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{1}{\frac{1}{3}m_S l^2 + m_M l^2} \left( -D \dot{\varphi} + m_S g \frac{l}{2} \sin(\varphi) + m_M g l \sin(\varphi) \right. \\
&\quad - k \frac{p_1 p_2}{(a+l-l \cos(\varphi))^2 + (l \sin(\varphi))^2} \\
&\quad \cdot \left. l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l \sin(\varphi)}{a+l-l \cos(\varphi)}\right) - \varphi\right) \right) \\
&= f(\varphi, \dot{\varphi}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Für die Lösung wird die rechte Seite von (11), wie oben ersichtlich, mit  $f(\varphi, \dot{\varphi})$  abgekürzt. Die Differentialgleichung hat somit die „Bauform“  $\ddot{\varphi} = f(\varphi, \dot{\varphi})$ .

## 2 Numerische Lösung der Bewegungsgleichung

Da (1) bzw. (11) Ordnung 2 hat, benötigt man zur Lösung 2 Startwerte

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 \text{ und} \tag{12}$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0. \tag{13}$$

Um die Rückführung der zu lösenden Differentialgleichung 2. Ordnung auf ein System von 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung zu vermeiden, wird der 1. Schritt als Taylor-Startschritt ausgeführt. Dazu wird die 2. Ableitung von  $\varphi$  durch einen geeigneten Differenzenquotienten mit hinreichend kleinem  $\Delta t$  approximiert. Man erhält, diskretisiert auf einem uniformen Gitter mit der Schrittweite  $\Delta t$ , d.h.  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$

$$\ddot{\varphi}(t_0) \approx \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta t} - \dot{\varphi}_0}{\frac{\Delta t}{2}}, \tag{14}$$

bzw. eingesetzt in (11) und umgeformt auf  $\varphi_1$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0). \tag{15}$$

Für  $i \geq 2$  muss zusätzlich die 1. Ableitung für die Berechnung der Dämpfung diskretisiert werden. Damit die Differentialgleichung mit einem expliziten Verfahren gelöst werden kann, wird die 1. Ableitung durch den rückwärtigen Differenzenquotienten approximiert<sup>4</sup>

$$\dot{\varphi}(t_{i-1}) \approx \frac{\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}}{\Delta t}. \tag{16}$$

Für die 2. Ableitung gilt

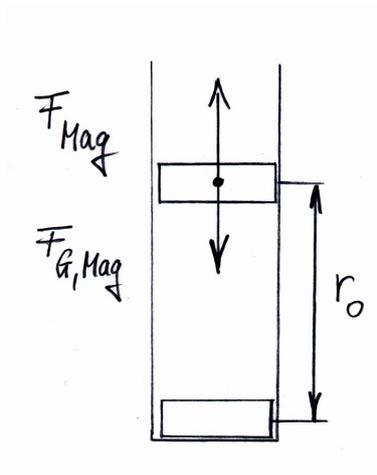
$$\ddot{\varphi}(t_{i-1}) \approx \frac{\varphi_i - 2\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}}{\Delta t^2}, \tag{17}$$

eingesetzt in (11) erhält man

$$\varphi_i = 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2} + \Delta t^2 f\left(\varphi_{i-1}, \frac{\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}}{\Delta t}\right). \tag{18}$$

**Wichtig:** Für die Lösung eines konkreten Beispiels fehlt die Bestimmung der unbekanntenen Polstärken  $p_1$  und  $p_2$  sowie der Konstante  $k$ . Dies kann wie folgt bewerkstelligt werden (siehe Abbildung).

<sup>4</sup>Bei der nur sehr schwachen Dämpfung ist dies zulässig.



Man legt den einen Magneten auf den Boden eines dünnen einseitig geschlossenen Rohres, und lässt den anderen Magneten durch die abstoßende Kraft darüber schweben<sup>5</sup>. Man misst im eingeschwungenen Zustand den Abstand  $r_0$  zwischen den beiden Magneten. Gemäß dem 1. Newtonschen Gesetz gilt für die Beträge der Kräfte

$$F_{G, Mag} = F_{Mag} \quad (19)$$

$$m_M g = k \frac{p_1 p_2}{r_0^2}. \quad (20)$$

Kürzt man  $k p_1 p_2$  mit einer neu eingeführten Konstante  $C$  ab, erhält man

$$C := k p_1 p_2 = m_M g r_0^2, \quad (21)$$

hat so die Bestimmung der drei Parameter „umschiff“ und kann  $C$  in die Berechnung einsetzen. Die einzigen zu messenden Größen zur Bestimmung von  $C$  sind  $r_0$  und  $m_M$ .

## Beispiel

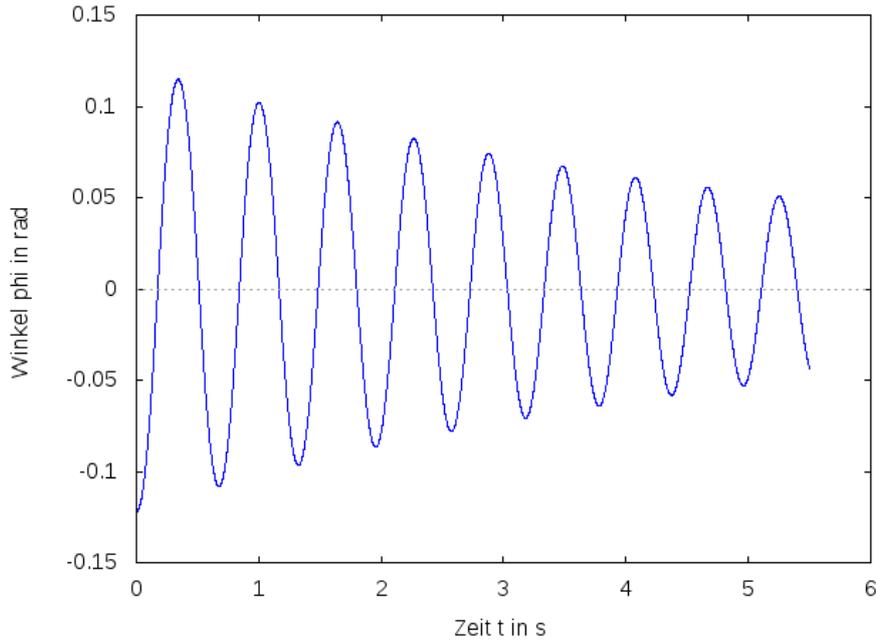
Zur Kontrolle der Modellbildung wurde eine Simulation durchgeführt. Die daraus bestimmbare Periodendauer wurde mit der experimentell über 10 Schwingungen ermittelten Periodendauer verglichen. Die Parameter können dem Quellcode des Maxima-Programms aus Anhang A entnommen werden.

Als Startwerte wurden

$$\begin{aligned} \varphi(t=0) &= 7^\circ \approx 0,12 \text{ rad} \\ \dot{\varphi}(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

gewählt (siehe ebenfalls Anhang A). Das folgende Diagramm zeigt den Winkelverlauf  $\varphi$  aufgetragen über der Zeit  $t$ .

<sup>5</sup>Das Rohr muss so dünn sein, dass sich keiner der beiden Magnete umdrehen kann.



Daraus folgt eine mittlere gerechnete Periodendauer  $T_{ger} \approx 0,61 s$ . Bei einer über 10 Schwingungen gemessenen mittleren Periodendauer von  $T_{gem} \approx 0,55 s$  ergibt sich ein relativer Fehler von  $\Delta T_{rel} \approx 11 \%$ .

### 3 Berechnung des Kippwinkels

Im Folgenden soll der Grenzwinkel bestimmt werden, ab dem das durch die magnetische Kraft verursachte Moment nicht mehr ausreicht, um das Pendel aufrecht zu halten. Im statischen Fall gilt  $\ddot{\varphi} = 0$ , wodurch sich (11) unter Berücksichtigung von (21) zu

$$0 = m_S g \frac{l}{2} \sin(\varphi_g) + m_M g l \sin(\varphi_g) - \frac{C}{(a + l - l \cos(\varphi_g))^2 + (l \sin(\varphi_g))^2} l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l \sin(\varphi_g)}{a + l - l \cos(\varphi_g)}\right) - \varphi_g\right) \quad (22)$$

vereinfacht. Diese nichtlineare Gleichung kann z.B. mittels Newtonverfahren gelöst werden. Für die im Anhang A angeführten Parameter erhält man einen Grenzwinkel  $\varphi_{g,ger} \approx 0,27 rad \approx 15,6^\circ$ . Der gemessene Grenzwinkel beträgt  $\varphi_{g,gem} \approx 12^\circ$ , was einen relativen Fehler von  $\Delta\varphi\% \approx 23\%$  ergibt.

### 4 Fazit

Im Rahmen der Genauigkeit der Messungen und der gewählten Modellierung erscheinen die relativen Fehler für die Periodendauer und den Kippwinkel akzeptabel. Eine größere Fehlerquelle stellt hierbei sicher das sehr einfach „gestrickte“ Kraftgesetz für die magnetische Kraft (siehe 4. Term in (1)) dar. Weiters verdreht sich bei der Bestimmung der Konstante  $C$  stets der obere Magnet im Rohr, sodass dieser nicht mehr exakt senkrecht im Rohr schwebt und dadurch  $C$  nicht „besonders genau“ bestimmbar ist.

## A Anhang – Quellcode des Maxima-Programms

Es folgt der Quellcode des Maxima-Programms zur Lösung der Bewegungsgleichung (11).

```
(%i1) kill(all)$
  Mathematische Modellierung des Versuchs 'Magnetpendel'
Autor: Martin Tutz
Alle Einheiten in SI!
(%i1) load(mnewton)$
(%i2) ratprint:false;
(ratprint) false
  Masse des Magneten
(%i3) mM:0.006;
(mM) 0.006
  Erdbeschleunigung
(%i4) g:9.81;
(g) 9.81
  Länge des Stabes
(%i5) l:0.215;
(l) 0.215
  Masse des Stabes
(%i6) mS:0.003;
(mS) 0.003
  Abstand der Magnete (gemessen in der Ruhelage)
(%i7) a:0.057;
(a) 0.057
  Gleichgewichtslage des Magneten (ca. 5 cm über dem anderen Magneten)
(%i8) xggw:0.055;
(xggw) 0.055
  Dimensionierung der Konstanten  $C=k*p1*p2$  im Kraftgesetz.
  Damit wird die Rechnung an das tatsächliche Experiment angepasst
  und die Ermittlung der Polstärken sozusagen 'umschifft'.
(%i9) C:mM*g*xggw^2;
(C) 1.7805150000000001*10^-4
  Dämpfungskonstante
(%i10) D:0.0001;
(D) 1.0*10^-4
  Plot der wirkenden Kraft
(%i11) wxplot2d([C/x^2], [x,0.01,0.2])$
(%t11) (Bild)
(%i12) IStab:float(1/3*mS*l^2);
(IStab) 4.6225*10^-5
(%i13) IMagnet:float(mM*l^2);
(IMagnet) 2.7735*10^-4
(%i14) Iges:IStab+IMagnet;
(Iges) 3.23575*10^-4
  Anfangswerte
(%i15) phi[0]:float(-7/180*%pi);
(%o15) -0.1221730476396
(%i16) phidt[0]:0.;
```

```

(%o16) 0
  Integrationsdauer
(%i17) tend:5.5;
(tend) 5.5
  Zeitschrittweite
(%i18) deltat:0.001;
(deltat) 0.001
  Anzahl der Iterationen
(%i19) N:round(tend/deltat);
(N) 5500
  Startschritt = expl. Taylorschritt (notwendig, da die DGL Ordnung 2 hat)
(%i20) phi[1]:phi[0]+phidt[0]*deltat+deltat^2/2*1/Iges*(-1)
      *(D*phidt[0]-mS*g*1/2*sin(phi[0])-mM*g*1*sin(phi[0]))
      +C/((a+1-l*cos(phi[0]))^2+l^2*sin(phi[0])^2)*l
      *cos(float(%pi)/2-atan(l*sin(phi[0])/(a+1-l*cos(phi[0])))-phi[0]));
(%o20) -0.12216861396725
  Iteration
(%i21) for i:2 thru N do block(
      phi[i]:2*phi[i-1]-phi[i-2]+deltat^2*1/Iges*(-1)*(D*(phi[i-1]-phi[i-2])/deltat
      -mS*g*1/2*sin(phi[i-1])-mM*g*1*sin(phi[i-1]))
      +C/((a+1-l*cos(phi[i-1]))^2+l^2*sin(phi[i-1])^2)
      *l*cos(float(%pi)/2-atan(l*sin(phi[i-1])
      /(a+1-l*cos(phi[i-1])))-phi[i-1])),
      if mod(i,10000)=0 then display(i)
);
(%o21) done
  Plot der phi-Werte
(%i22) phiwerte:makelist([j*deltat,phi[j]],j,0,N)$
(%i23) wxplot2d([discrete,phiwerte],[ylabel,"Winkel phi in rad"],
      [xlabel,"Zeit t in s"])$
(%t23) (Bild)
(%i24) plot2d([discrete,phiwerte],[ylabel,"Winkel phi in rad"],
      [xlabel,"Zeit t in s"],
      [gnuplot_term,png],[gnuplot_out_file,
      "/home/martin/Mathe-Physik/Inverses-Magnetpendel/phi.jpeg"]);
(%o24) "/home/martin/maxout.gnuplot_pipes
/home/martin/Mathe-Physik/Inverses-Magnetpendel/phi.jpeg"
  Plot der Winkelgeschwindigkeitsfunktion
(%i25) for i:1 thru N do block(
      phidt[i):(phi[i]-phi[i-1])/deltat
);
(%o25) done
(%i26) phidtwerte:makelist([j*deltat,phidt[j]],j,0,N)$
(%i27) wxplot2d(/*[[discrete,xwerte],*/[discrete,phidtwerte]/*]*)$
(%t27) (Bild)
  Berechnung des Kippwinkels/Grenzwinkels
(%i28) glg:-mS*g*1/2*sin(phigr)-mM*g*1*sin(phigr)
+C/((a+1-l*cos(phigr))^2+l^2*sin(phigr)^2)
*l*cos(float(%pi)/2-atan(l*sin(phigr)/(a+1-l*cos(phigr)))-phigr)=0;

```

