Grundlagen stochastische Differentialgleichungen

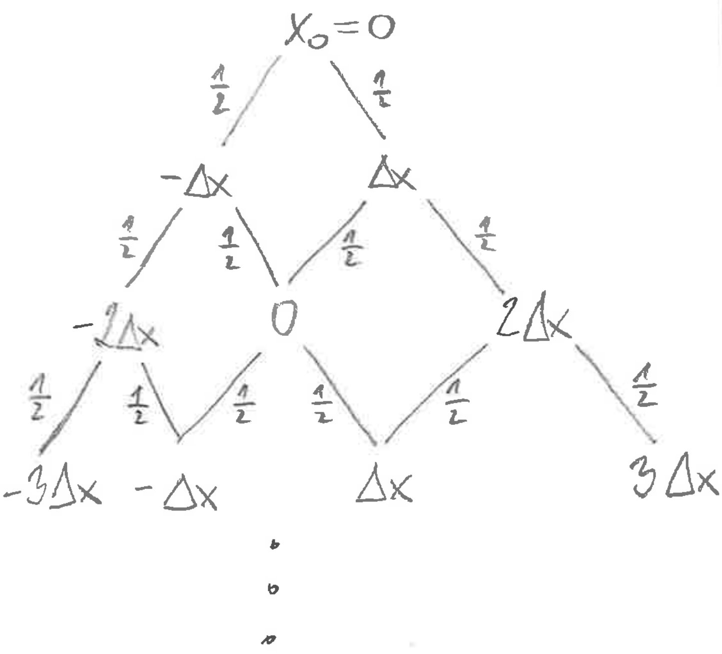
M. Tutz
2026

Kapitel 1

Betrachtungen nach Ito

Der Random Walk

Innerhalb von Δt ein Zufallsschritt der Schrittweite Δx mit $p_{li} = p_{re} = 0{,}5$ und Startwert $x_0 = 0$:



$\underline{t = 0}$

$\underline{t = \Delta t:}$ $E(X) = -\Delta x \cdot \frac{1}{2} + \Delta x \cdot \frac{1}{2} = 0$

$$V(X) = \frac{1}{2}(0+\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(0-\Delta x)^2 = \frac{1}{2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\Delta x^2 = \Delta x^2$$

$\underline{t = 2\Delta t:}$ $E(S_t) = -2\Delta x \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 2\Delta x \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} = 0$

$$V(S_t) = \frac{1}{4}(0+2\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(0-0)^2 + \frac{1}{4}(0-2\Delta x)^2 = \frac{4\Delta x^2}{4} + \frac{4\Delta x^2}{4} = 2\Delta x^2$$

$\underline{t = 3\Delta t:}$ $E(S_t) = -3\Delta x \cdot \frac{1}{8} - \Delta x \cdot \frac{3}{8} + \Delta x \cdot \frac{3}{8} + 3\Delta x \cdot \frac{1}{8} = 0$

$$V(S_t) = \frac{1}{8}(0+3\Delta x)^2 + \frac{3}{8}(0+\Delta x)^2 + \frac{3}{8}(0-\Delta x)^2 + \frac{1}{8}(0-3\Delta x)^2 =$$
$$= \frac{9}{8}\Delta x^2 + \frac{3}{8}\Delta x^2 + \frac{3}{8}\Delta x^2 + \frac{9}{8}\Delta x^2 = \frac{24}{8}\Delta x^2 = 3\Delta x^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} t = n \cdot \Delta t \\ E(S_t) = 0 \\ V(S_t) = n \cdot \Delta x^2 \end{array}}$$

bzw. $V(\underbrace{S_t}_{\text{Summe der Schritte}}) = n \cdot V(X)$, da statistisch <u>unabhängig</u>!

$$V(S_t) = \frac{t}{\Delta t} \cdot V(X)$$

Übergang vom Random Walk zum Wiener-Prozess W_t

$$W_t \sim N(\underset{\substack{\uparrow \\ E(S_t)}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ V(S_t)}}{t}),$$ d.h. $V(S_t) = t$ als Bedingung (Begründung siehe später)

$\Rightarrow$ Übergang zum Wiener-Prozess $\Delta t \to 0$:

$$V(S_t)_{WP} = \lim_{\Delta t \to 0} V(S_t)_{RW} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{t}}{\Delta t} \cdot \Delta x^2 = \cancel{t}}_{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 1}$$

bzw. $dx^2 = dt$

$$dx = \sqrt{dt}$$

Nur mit dieser Schrittweitenskalierung bleibt die Unabhängigkeit der einzelnen Schritte gewahrt und die Varianz wächst (so wie beim Random Walk) linear mit der Zeit t.

Der Wiener-Prozess ist somit ein Random Walk mit infinitesimal kleinen Schritten.

Die mathematisch „saubere" Herleitung wäre mittels Satz von Donsker.

Bem.: Der Satz von Donsker ist für Pfade das, was der zentrale Grenzwertsatz für Verteilungen ist.

Herleitung der Ito-Regeln via quadr. Variation

Die quadratische Variation ist ein Maß für die Schwankungsbreite von Zufallspfaden.

Def.: W_{t_i} ... i-ter Wert eines Zufallspfades basierend auf einem Wiener-Prozess:

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2}_{= \Delta W_i \sim N(0, \Delta t)}$$

Für den Erwartungswert eines Schrittes gilt

$$E(\Delta W_i^2) = V(\Delta W_i) = \Delta t$$

per Def. des Wiener-Prozesses

da der Erwartungswert der Zuwächse selbst $= 0$ ist!

$$\Longrightarrow E(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\Delta W_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t = n \cdot \Delta t = t$$

d.h. Im Mittel ist die quadrat. Variation genau t.

⊗ siehe nächste Seite!

$\Rightarrow$ Grenzwert $n \to \infty$ bzw. $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i^2 = t = n \cdot \Delta t$$

$\Rightarrow$ Grenzübergang für einen Einzelschritt:

$$\Delta W_i^2 = \Delta t \xrightarrow{\Delta t \to 0} \boxed{dW_t^2 = dt}$$

⊗: Dass $E(Q_n) = t$, also die quadrat. Variation „im Mittel" t ergibt, ist eine „unsichere Erkenntnis" ... „nur im Mittel"
Wenn hingegen die $V(Q_n) = 0$ ist, wird aus einer Zufallsvariablen eine „sichere" Konstante.

$$V(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} V(\Delta W_i^2)$$

siehe Anhang

WW: Ist eine ZV $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow V(X^2) = 2\sigma^4$

für den Wiener-Prozess gilt $\sigma^2 = V(\Delta W_i) = \Delta t$

$$\Longrightarrow V(\Delta W_i^2) = 2 \cdot \Delta t^2$$

$$\Longrightarrow V(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} V(\Delta W_i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2\,\Delta t^2 = n \cdot 2 \underbrace{\Delta t}_{=\frac{t}{n}}{}^2 =$$

$$= n \cdot 2 \left(\frac{t}{n}\right)^2 = \cancel{n} \cdot 2 \cdot \frac{t^2}{n^{\cancel{2}}} = 2 \cdot \frac{t^2}{n}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} V(Q_n) = \lim_{n\to\infty} 2\frac{t^2}{n} \to 0$$

Dass die Varianz der quadrat. Variation im Grenzfall verschwindet, bedeutet, dass der Prozess <u>deterministisch</u> wird. Er hängt also gar nicht mehr vom Zufall ab!

Das Lemma von Ito & die Ito-Regeln

Zur Lösung einer SDGL (von zB.: $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$) wählt man die Ansatz- bzw. Testfkt $f(t, X_t)$. Die zugehörige Taylorentwicklung von f lautet:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} dX_t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial X_t} dt\, dX_t + \dots$$

mit $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$

und $dX_t^2 = \mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dW_t dt + \sigma^2 dW_t^2$ $\qquad O(dt) = 1$

$\Longrightarrow df = \frac{\partial f}{\partial t} dt$ ... bleibt, sonst sinnlos :) dt ... Ordnung 1

$+ \frac{\partial f}{\partial X_t} \cdot (\mu dt + \sigma dW_t)$ ... dt-Term bleibt, dW_t auch, da $dW_t = \sqrt{dt}$ ... dW_t ... Ordnung $\frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2$ ... geht viel stärker Richtung 0 als dt

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \cdot \underbrace{\mu^2 dt^2}_{\to 0} + 2\mu\sigma \underbrace{dW_t\, dt}_{= dt^{\frac{1}{2}} \cdot dt = dt^{\frac{3}{2}} \to 0} + \sigma^2 \boxed{\underbrace{dW_t^2}_{= dt}}$$

bekannt von der quadrat. Variation

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial X_t} \underbrace{dt(\mu dt}_{\to 0} + \sigma dW_t) \qquad dt\,\sigma dW_t = dt^{\frac{3}{2}} \to 0$$

Zusammenfassung:

dt, dW_t, $dW_t^2 = dt$ } bleiben für die Integration bestehen

dt^2, $dW_t \cdot dt$ } $\to 0$

$O(dt) = 1$

$O(dW_t) = \frac{1}{2}$

$O(dW_t^2) = O(dt) = 1$

$O(dt^2) = 2$

$O(dW_t \cdot dt) = O(dt^{\frac{1}{2}} dt) = \frac{3}{2}$

Stochastische DGLs

arithm. Brownsche Bewegung

1) $dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$

2) $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma\, dW_t$

3) $dX_t = \mu\, dt + \sigma X_t\, dW_t$

4) $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t$

mit $X(t=0) = X_0$ und W_t ... Std.-Wiener-Prozess

d.h.: $dW_t \sim N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}$

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}$

geometrische Brownsche Bewegung

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

5) $dX_t = \theta(\mu - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t$, $\theta, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$

Langevin-Glg (= OU-Prozess mit $\mu = 0$)

6) $dX_t = -X_t\, dt + \sigma\, dW_t$ ($\hat{=}$ 2) mit $\mu = -1$)

stochastischer harmonischer Oszillator (ungedämpft)

7) $\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{=\omega^2 \text{ (Federpendel)}} x = \sigma \frac{dW_t}{dt}$ mit $dW_t \sim N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}$, $x = x(t)$

math. „unsauber", da W_t nicht differenzierbar ist!

Herleitung des Lemmas von Itô

für $dX_t = \sigma dW_t$

$f = f(t, X_t)$ … 2x stetig diff'bar. x … Wert des stoch. Prozesses X_t an der Stelle, an der f abgeleitet wird

Taylor: $$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} dX_t\, dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2$$

SDGL: $dX_t = \sigma dW_t$ mit W_t … Wiener-Prozess

$$\Rightarrow \quad dX_t^2 = \sigma^2 dW_t^2$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dW_t + \overbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2}^{\to 0} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\sigma \overbrace{dW_t\, dt}^{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 \underbrace{dW_t^2}_{\to dt}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW_t}}$$ … Lemma v. Itô

Lösung: wähle $f(x) = x$ … 2x stetig diff'bar & unabhängig von t

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad f''(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad df = \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0\Big) dt + \sigma \cdot 1 \cdot dW_t$$

$$\Rightarrow \quad df = \sigma dW_t \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_0^t df(x)}_{=\int_0^t dX_s} = \sigma \underbrace{\int_0^t dW_t}_{} = \sigma \cdot (W_t - \underbrace{W_0}_{\substack{=0 \\ \text{per Def.}}})$$

$$\Rightarrow \quad X_t - X_0 = \sigma W_t \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X_t = X_0 + \sigma \cdot W_t}}$$

direkte Lösung von $dX_t = \sigma dW_t$

$$\int_0^t dX_t = \sigma \int_0^t dW_t \qquad W_t \text{... Wiener-Prozess}$$

$$X_t - X_0 = \sigma \cdot W_t$$

$$\underline{\underline{X_t = X_0 + \sigma W_t}}$$

Probe: $dX_t = \underbrace{dX_0}_{=0,\text{ da } X_0 = \text{konst.}} + \sigma dW_t$ ✓

Lösung von $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$ mittels Lemma von Ito

Ito: $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2$

Testfkt $f = x$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$dX_t^2 = (\mu dt + \sigma dW_t)^2$
$= \mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dW_t dt + \sigma^2 dW_t^2$

$\Rightarrow df = 0 \cdot dt + 1 \cdot (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot dX_t^2$

$dX_t = df = \mu dt + \sigma dW_t \quad \Big| \int \ldots$ 1x im Kreis gerechnet, da es hier keinen Ito-Korrekturterm gibt!

$\int_0^t dX_s = \mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW_s$

$X_t - X_0 = \mu(t-0) + \sigma(W_t - \underbrace{W_0}_{=0})$

$\underline{\underline{X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t}}$

direkte Lösung von $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$

$$\int_0^t dX_s = \mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

$$X_t - X_0 = \mu(t-0) + \sigma(W_t - W_0)$$

$$\underline{\underline{X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t}}$$

Lösung von $dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma \, dW_t$

ohne den add. Rauschterm wäre die Lösung eine Expfkt.

$$\Longrightarrow \quad f(x,t) = x \cdot e^{-\mu t}$$

Ableitungen für Lemma von Ito:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mu \cdot x \cdot e^{-\mu t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\mu t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$dX_t^2 = \left(\mu X_t \, dt + \sigma \, dW_t\right)^2 = \mu^2 X_t^2 \, dt^2 + 2\mu X_t \sigma \, dt \, dW_t + \sigma^2 dW_t^2$$

Ito:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2$$

$$df = -\mu X_t e^{-\mu t} dt + e^{-\mu t} dX_t + 0 \cdot dX_t^2$$

$$df = -\mu X_t e^{-\mu t} dt + e^{-\mu t} \cdot \left(\mu X_t \, dt + \sigma \, dW_t\right)$$

$$d\left(X_t \cdot e^{-\mu t}\right) = \underbrace{\underbrace{\left(-\mu X_t + \mu X_t\right)}_{=0} e^{-\mu t} dt}_{=0} + e^{-\mu t} \sigma \, dW_t$$

$$d\left(X_t \cdot e^{-\mu t}\right) = \sigma \cdot e^{-\mu t} dW_t \quad \Big| \int_0^t$$

$$\int_0^t d\left(X_s \cdot e^{-\mu s}\right) = \sigma \int_0^t e^{-\mu s} dW_s$$

$$X_t \cdot e^{-\mu t} - X_0 \cdot \underbrace{e^{-\mu 0}}_{=1} = \sigma \cdot \int_0^t e^{-\mu s} dW_s$$

$$X_t \cdot e^{-\mu t} = X_0 + \sigma \cdot \int_0^t e^{-\mu s} dW_s$$

$$X_t = X_0 \cdot e^{\mu t} + \sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)} dW_s$$

Das Integral kann approx. werden durch:

$$\sum_{j=1}^{i} e^{\mu(i-j)\Delta t} \cdot dW_j$$

Bemerkung zum Rauschterm

Der stochastische Teil der Lösung, also $\int_0^t e^{\mu(t-s)}\,dW_s$, lässt sich nicht elementar berechnen.
Allerdings kann man mittels Erwartungswert & Varianz des Integrals beschreiben, welcher Verteilung das Integral folgt: $\sigma\cdot\int_0^t e^{\mu(t-s)}\,dW_s = \sigma e^{\mu t}\cdot\underbrace{\int_0^t e^{-\mu s}\,dW_s}$

$$\underline{\underline{E\left(\int_0^t e^{-\mu\cdot s}\,dW_s\right)}} = E\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty}}_{\text{in weiterer Folge weggelassen}} \sum_{i=1}^n e^{-\mu\cdot s_i}\cdot\underbrace{\left(W_{s_i}-W_{s_{i-1}}\right)}_{=\Delta W_{s_i}}\Big)$$

Die ΔW_{s_i} sind alle voneinander unabhängig.
$e^{-\mu\cdot s_i}$ ... sind $\forall\, s_i$ berechenbar & somit bekannt

$$\Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^n e^{-\mu\cdot s_i}\,\Delta W_{s_i}\right) = \sum_{i=1}^n E\left(e^{-\mu\cdot s_i}\,\Delta W_{s_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n e^{-\mu\cdot s_i}\,\underbrace{E\left(\Delta W_{s_i}\right)}_{\text{per Def.}=0} = \sum_{i=1}^n e^{-\mu\cdot s_i}\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Da $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ gilt $\Rightarrow$ mit $E(X)=0$: $V(X)=E(X^2)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V(X)}} = E(X^2) = E\left(\left(\sigma\cdot e^{\mu t}\cdot\int_0^t e^{-\mu\cdot s}\,dW_s\right)^2\right) = E\Big(\sigma^2 e^{2\mu t}\int_0^t e^{-2\mu\cdot s}\,\underbrace{dW_s^2}_{\substack{=ds\\ \text{(Ito-Regeln)}}}\Big) =$$

$$= E\Big(\underbrace{\sigma^2\cdot e^{2\mu t}\cdot\int_0^t e^{-2\mu\cdot s}\,ds}\Big) = \sigma^2 e^{2\mu t}\frac{1}{2\mu}e^{-2\mu s}\Big|_0^t =$$

alles deterministisch
$\Rightarrow$ der Erwartungswert
E ist unnötig, da
es keinen Zufallsanteil
(mehr) gibt!

$$= \sigma^2 e^{2\mu t}\cdot\left(-\frac{1}{2\mu}\cdot e^{-2\mu t} + \frac{1}{2\mu}\cdot 1\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{2\mu}\cdot\left(e^{2\mu t}-1\right)}}$$

$\Longrightarrow$ für den Rauschterm $\sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)} dW_s$:

Dieser stellt eine Zufallsvariable dar, die $N(E(X), V(X)) = N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(e^{2\mu t} - 1\right)\right)$ verteilt ist.

Lösung von $dX_t = \sigma X_t \, dW_t$ mittels L.v. Itô

Ansatz: $f(x) = \ln(x)$, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2$$

$$df = 0 \cdot dt + \frac{1}{\cancel{X_t}} \sigma \cancel{X_t} \, dW_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{X_t^2}}\right) \cdot \sigma^2 \cancel{X_t^2} \underbrace{dW_t^2}_{= dt}$$

$$d(\ln(X_t)) = \sigma \, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad \Big| \int_0^t$$

$$\int_0^t d(\ln(X_s)) = -\frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t dt + \sigma \int_0^t dW_s$$

$$\ln(X_t) - \ln(X_0) = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma(W_t - \underbrace{W_0}_{=0})$$

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t \quad \Big| e^{(\dots)}$$

$$\underline{\underline{X_t = X_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}}}$$

Lösung von $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t$ mittels Lemma von Ito ⊗

Ansatz: $f(x) = \ln(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Ito: $$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t^2 =$$

$$= 0 \cdot dt + \frac{1}{\cancel{X_t}}\left(\mu \cancel{X_t}\, dt + \sigma \cancel{X_t}\, dW_t\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{X_t^2}}\right)\cdot\left(\mu^2 X_t^2 \underbrace{dt^2}_{\to 0} + 2\mu X_t \sigma X_t \underbrace{dW_t\, dt}_{\text{„Ito"}\ \to 0} + \sigma^2 \cancel{X_t^2}\, dW_t^2\right) =$$

$$= \mu\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2\, dt$$

$$d(\ln(X_t)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\, dW_t \quad \Big|\int_0^t$$

$$\ln X_t - \ln X_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\left(W_t - \underbrace{W_0}_{=0\ (\text{Def.})}\right)$$

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \text{——\,"\,——} \quad \Big|\, e^{(\ldots)}$$

$$\Rightarrow X_t = X_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

⊗ ... Glg der geometrischen Brownschen Bewegung (GBM)

Probe für die GBM $dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t$

Lösung: $X_t = X_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$

$$f(t, W_t) = X_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

Ito: $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial w} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \underbrace{dW_t^2}_{= dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w} \underbrace{dt \, dW_t}_{\to 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X_0 \cdot (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma dW_t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = X_0 \cdot \sigma \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = X_0 \cdot \sigma^2 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

$$\begin{aligned} dX_t &= X_0 (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \, dt \\ &+ X_0 \cdot \sigma \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \, dW_t \\ &+ \tfrac{1}{2} X_0 \, \sigma^2 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \, dt \\ &= (\mu \underbrace{- \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\sigma^2}_{=0}) \cdot X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t = \underline{\underline{\mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t}} \end{aligned}$$

⚠ nicht zielführend!

Lösung von $dX_t = \mu\, dt + \sigma X_t\, dW_t$ mittels Lemma von Itô

⚠ nicht zielführend!

Ansatzfkt: $f(x) = \ln(x)$, Begründung: mit der 1. Abl. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ (& der 2. Abl. $(\ln(x))'' = -\frac{1}{x^2}$) "entfernt" man das X_t & X_t^2 aus dem Rauschterm!

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$dX_t^2 = (\mu\, dt + \sigma X_t\, dW_t)^2 = \mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma X_t\, dW_t\, dt + \sigma^2 X_t^2 \underbrace{dW_t^2}_{=dt\ (\text{Itô})}$$

$$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2 =$$

$$= 0 \cdot dt + \frac{1}{X_t} \cdot (\mu\, dt + \sigma X_t\, dW_t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right) \cdot \Big(\mu^2 \underbrace{dt^2}_{\to 0} + 2\mu\sigma \underbrace{dW_t\, dt}_{\to 0} + \sigma^2 X_t^2\, dt\Big) =$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{X_t} dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$= \left(\mu \cdot \frac{1}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t$$

Problem: $\boxed{\frac{1}{X_t} \text{ im 1. Term!}}$ ↯ ... lässt sich nicht integrieren!

Lösung von $dX_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot X_t \cdot dW_t$ mittels Lemma von Ito

Die Lösung der „homogenen" sDGL $dX_t = \sigma X_t \, dW_t$ lautet

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}.$$

Als integrierenden Faktor wählt man den Kehrwert dieser Lösung $\Rightarrow$ Def. $Y_t = X_t \cdot F_t = X_t \cdot e^{+\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W_t}$

und somit als Ansatzfkt: $f(x, w, t) = x \cdot e^{+\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma w}$

Das Lemma von Ito ist für diesen Fall wieder die entsprechende Taylorentwicklung von $f = f(x, w, t)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{\partial f}{\partial w} dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} dX_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} dW_t^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} dt\, dX_t + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w} dt\, dW_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w} dX_t\, dW_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma w} = \frac{1}{2}\sigma^2 X_t F_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma w} = F_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = -\sigma \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w} = -\sigma X_t W_t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \ldots \quad \text{egal, da } dt^2 \to 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = \sigma^2 \cdot X_t \cdot F_t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 x - \sigma w} = \frac{1}{2}\sigma^2 F_t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w} = \ldots \quad \text{egal, da } dW_t \cdot dt = dt^{\frac{3}{2}} \to 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w} = -\sigma \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma w} = -\sigma \cdot F_t$$

$\Rightarrow$ Eingesetzt & gemäß Itô-Regeln:

$$df = \tfrac{1}{2}\sigma^2 X_t F_t\, dt + F_t\, \underbrace{dX_t}_{= \mu dt + \sigma X_t dW_t} - \sigma X_t W_t\, dW_t$$

$$+ \tfrac{1}{2}\underbrace{(\dots)\, dt^2}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 0\, dX_t^2}_{=0} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 X_t F_t\, \underbrace{dW_t^2}_{=dt}$$

$$+ \sigma^2 X_t F_t \cdot dt\, \underbrace{dX_t}_{= \mu dt + \sigma X_t dW_t} + (\dots)\cdot \underbrace{dt\, dW_t}_{= dt^{3/2} \to 0} - \sigma F_t\, \underbrace{dX_t}_{= \mu dt + \sigma X_t dW_t}\, dW_t$$

$$\Rightarrow df = \cancel{\tfrac{1}{2}\sigma^2 X_t F_t\, dt} + \mu F_t\, dt + \cancel{\sigma F_t X_t\, dW_t} - \cancel{\sigma X_t F_t\, dW_t}$$

$$+ \cancel{\tfrac{1}{2}\sigma^2 X_t F_t\, dt}$$

$$+ \sigma^2 X_t W_t \mu\, \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \sigma^3 X_t^2 F_t\, \underbrace{dt\, dW_t}_{= dt^{3/2} \to 0}$$

$$- \sigma F_t \mu\, \underbrace{dt\, dW_t}_{= dt^{3/2} \to 0} - \cancel{\sigma^2 F_t X_t\, \underbrace{dW_t^2}_{= dt}}$$

$$\Rightarrow df = \mu \cdot F_t \cdot dt$$

bzw. $dY_t = \mu \cdot F_t \cdot dt \quad \Big| \int_0^t$

$$\underbrace{Y_t}_{= X_t \cdot F_t} - \underbrace{Y_0}_{= X_0 \cdot F_0} = \mu \cdot \int_0^t F_s\, ds \quad \text{mit } F_0 = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0 - \sigma \cdot \overbrace{W_0}^{=0}} = 0$$

$$\Rightarrow X_t \cdot F_t = X_0 + \mu \cdot \int_0^t F_s\, ds \quad \Big| \cdot F_t^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma W_t}$$

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} + \mu \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 s - \sigma W_s}\, ds$$

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} + \mu \cdot \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s) + \sigma (W_t - W_s)}\, ds$$

Probe für $dX_t = \mu \cdot dt + \sigma X_t \cdot dW_t$

Lösung: $X_t = X_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dW_t} + \mu \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma(W_t - W_s)} ds$

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma W_t} + \mu e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma dW_t} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 s - \sigma W_s} ds$$

$$\Rightarrow X_t \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W_t}}_{= Y_t = f(t, W_t)} = \boxed{X_0 + \mu \int_0^t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 s - \sigma W_s} ds} \; {}^{*)}$$

totales Differential der linken Seite:

$$d(X_t \cdot Y_t) = X_t \, dY_t + dX_t \, Y_t + dX_t \, dY_t \circleddash$$

dY_t nach Ito:

$$f(t, W_t) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W_t}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \underbrace{dW_t^2}_{\to = dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial W} \underbrace{dt \, dW_t}_{\to 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 Y_t \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\sigma^4 Y_t \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial W} = -\frac{1}{2}\sigma^3 Y_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial W} = -\sigma Y_t \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} = \sigma^2 Y_t$$

$$\Rightarrow dY_t = \frac{1}{2}\sigma^2 Y_t \, dt - \sigma Y_t \, dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 Y_t \, dt = \sigma^2 Y_t \, dt - \sigma Y_t \, dW_t$$

$$\circleddash X_t \cdot (\sigma^2 Y_t \, dt - \sigma Y_t \, dW_t) + (\mu dt + \sigma X_t \, dW_t) \cdot Y_t +$$
$$+ (\mu dt + \sigma X_t \, dW_t) \cdot (\sigma^2 Y_t \, dt - \sigma Y_t \, dW_t) =$$

$$= \cancel{\sigma^2 X_t Y_t \, dt} - \cancel{\sigma X_t Y_t \, dW_t} + \mu Y_t \, dt + \cancel{\sigma X_t Y_t \, dW_t} +$$
$$+ \mu \sigma^2 Y_t \underbrace{dt^2}_{\to 0} - \mu \sigma Y_t \underbrace{dt \, dW_t}_{\to 0} + \sigma^3 X_t Y_t \underbrace{dt \, dW_t}_{\to 0} - \cancel{\sigma^2 X_t Y_t \underbrace{dW_t^2}_{= dt}} =$$

$$= \mu \cdot Y_t \cdot dt = \underline{\underline{\mu \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W_t} dt}}$$

$\textcircled{=} \Rightarrow \checkmark$

<u>totales Differential der rechten Seite:</u>

$$\cdot)\ d\left(X_0 + \mu \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 s - \sigma W_s} ds\right) = \underline{\underline{\mu \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W_t} dt}}$$

Lösung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma \, dW_t$

Der „wesentliche" Term des deterministischen Anteils der sDGL lautet $-\theta X_t \, dt$ bzw. als DGL $dX_t = -\theta X_t \, dt$.

Die Lösung dieser DGL lautet $X_t = X_0 \cdot e^{-\theta t}$

$\Rightarrow$ Ansatz: $Y_t = X_t \cdot F_t = X_t \cdot e^{\theta t}$

bzw. $f(x,t) = x \cdot e^{\theta t}$

Ito: $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} dt \, dX_t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \theta \cdot x \cdot e^{\theta t} = \theta \cdot X_t \cdot F_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\theta t} = F_t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \theta^2 x e^{\theta t} = \theta^2 X_t F_t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \theta \cdot e^{\theta t} = \theta F_t$$

$\boxed{\text{Lösungsweg entspricht einer Var. der Konstanten mittels Ito!}}$

$$\Rightarrow df = \theta X_t F_t \, dt + F_t \cdot (\theta(\mu - X_t)dt + \sigma \, dW_t)$$
$$+ \frac{1}{2}\theta^2 X_t F_t \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{1} 0 \cdot dX_t^2}_{=0} + \theta \cdot F_t \cdot dt(\theta(\mu - X_t)dt + \sigma \, dW_t)$$

$$\Rightarrow df = \cancel{\theta X_t F_t \, dt} + \theta F_t \mu \, dt - \cancel{\theta F_t X_t \, dt} + \sigma F_t \, dW_t$$
$$+ \theta^2 F_t \mu \underbrace{dt^2}_{\to 0} - \theta^2 F_t X_t \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \sigma F_t \underbrace{dt \, dW_t}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow df = \theta F_t \mu \, dt + \sigma F_t \, dW_t$$

$$\Rightarrow d(Y_t) = \theta\mu \cdot e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW_t \quad \Big| \int_0^t$$

$$Y_t - Y_0 = \theta\mu \cdot \int_0^t e^{\theta s} ds + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW_s$$

$$X_t \cdot e^{\theta t} - X_0 \cdot \underbrace{e^{\theta \cdot 0}}_{=1} = \cancel{\theta} \cdot \mu \cdot \frac{1}{\cancel{\theta}}\Big(e^{\theta t} - \underbrace{e^{\theta \cdot 0}}_{=1}\Big) + \sigma \cdot \int_0^t e^{\theta s} \cdot dW_s$$

$$X_t = e^{-\theta t} \cdot \Big(X_0 + \mu \cdot (e^{\theta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW_s\Big)$$

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\theta t} + \mu \cdot \left(1 - e^{-\theta t}\right) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s$$

Probe für den OU-Prozess $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$

Lösung: $X_t = X_0 \cdot e^{-\theta t} + \mu(1-e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s$

Eine Probe wie bei der GBM ist nicht mögl., da W im Integral steckt und damit $\frac{\partial f}{\partial W}$ & $\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}$ für Ito nicht gebildet werden können ($\Rightarrow f(t, W_t)$ fehlt nicht). ⊗

Umformung: $| \cdot e^{\theta t}$

$$\underbrace{X_t \cdot e^{\theta t}}_{} = X_0 + \mu(e^{\theta t} - 1) + \sigma \underbrace{e^{\theta t} e^{-\theta t}}_{=1} \int_0^t e^{\theta s} dW_s \quad | d(\dots)$$

Ansatz somit $f(t, X_t) = X_t \cdot e^{\theta t}$!

totales Differenzial:

$$e^{\theta t} dX_t + \theta e^{\theta t} X_t dt + \underbrace{\theta e^{\theta t} dt\, dX_t}_{=0 \; ⊗⊗} = \mu \theta e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$$

$$dX_t = \mu\theta dt - \theta X_t dt + \sigma dW_t$$

$$dX_t = \theta(\mu - X_t) dt + \sigma dW_t$$

⊗: Die Lösung X_t hängt vom kompletten Pfad von W_s ab nicht nur vom aktuellen Wert W_t (so wie bei der GBM).

⊗⊗: Begründung: $\theta e^{\theta t} \cdot dt \cdot (\theta(\mu - X_t) \cdot dt + \sigma dW_t) =$

$$= \theta \cdot e^{\theta t} \cdot \theta(\mu - X_t) \cdot \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \sigma \theta e^{\theta t} \underbrace{dW_t\, dt}_{\to 0}$$

...nach den Regeln von Ito

Der stochastische „harmonische" Oszillator

SDGL: $m\ddot{x} + D\dot{x} + C\cdot x = \Phi(t)$ mit $\Phi(t)$ ... stoch. Kraft

homogen, dh. deterministisch $\ddot{x} + \underbrace{\frac{D}{m}}_{=\gamma}\dot{x} + \underbrace{\frac{C}{m}}_{=\omega_0^2} x = 0$

homogene Lösung: Ansatz: $x = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x} = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}_{<0 \text{ für eine periodische Lösung}}$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}_{\omega_D}\, i = -\frac{\gamma}{2} \pm \omega_D \cdot i$$

$\Longrightarrow$ Fundamentallösungen $x_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \cos(\omega_D t)$

$x_2 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \sin(\omega_D t)$

homogene Lösung: $x_h = c_1 x_1 + c_2 x_2$

Variation der Konstanten: $\underbrace{c_1 = c_1(t) \wedge c_2 = c_2(t)}$

$\to x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ ... sind stochastische „Fktn" bzw. Prozesse

$$\dot{x}(t) = \dot{c}_1 x_1 + c_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_2\dot{x}_2 = c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + \underbrace{\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2}_{=0 \text{ per. Def.}}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x}(t) = \dot{c}_1\dot{x}_1 + c_1\ddot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 + c_2\ddot{x}_2$$

I: $\dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 + \underbrace{c_1\ddot{x}_1 + c_2\ddot{x}_2 + \gamma c_1\dot{x}_1 + \gamma c_2\cdot\dot{x}_2 + \omega_0^2 c_1 x_1 + \omega_0^2 c_2 x_2} = \frac{1}{m}\Phi(t)$

II: $\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0$

I: $\dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 + c_1\cdot\underbrace{(\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1)}_{=0 \text{ homogene Glg.}} + c_2\cdot\underbrace{(\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2)}_{=0 \text{ homogene Glg}} = \frac{1}{m}\Phi(t) \quad \Big|\cdot dt$

II: $\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \quad \Big|\cdot dt$

$$\mathrm{I}: \; dc_1 \cdot \dot{x}_1 + dc_2 \cdot \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \cdot \sigma \cdot dW_t, \quad \text{da } \underbrace{\Phi(t) = \frac{dW_t}{dt}}$$

math. unsauber, da W_t nicht diffbar! „Physikerstyle"

$$\mathrm{II}: \; dc_1 \, x_1 + dc_2 \cdot x_2 = 0$$

$$\to dc_2 = -\frac{x_1}{x_2} \cdot dc_1$$

$$\mathrm{I}: \; dc_1 \dot{x}_1 - \frac{x_1}{x_2} dc_1 \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \sigma \, dW_t$$

$$dc_1 \left(\dot{x}_1 - \frac{x_1}{x_2} \dot{x}_2 \right) = \frac{1}{m} \sigma \, dW_t$$

$$dc_1 \; \frac{\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1}{x_2} = \text{—— '' ——}$$

$$dc_1 = \frac{x_2}{-\underline{(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)}} \cdot \frac{1}{m} \sigma \, dW_t$$

$$\to dc_1 = -\frac{x_2}{x_1} dc_2$$

$$\mathrm{I}: \; -\frac{x_2}{x_1} dc_2 \dot{x}_1 + dc_2 \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \sigma \, dW_t$$

$$dc_2 \cdot \frac{-x_2 \dot{x}_1 + x_1 \dot{x}_2}{x_1} = \frac{1}{m} \sigma \cdot dW_t$$

$$dc_2 = \frac{x_1}{\underline{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \cdot \dot{x}_1}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sigma \cdot dW_t$$

$$\underline{x_1 \cdot \dot{x}_2 - x_2 \cdot \dot{x}_1} =$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \cos(\omega_D t) \cdot \left(-\frac{\gamma}{2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \sin(\omega_D t) + e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \omega_D \cos(\omega_D t) \right)$$

$$- e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \sin(\omega_D t) \cdot \left(-\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \cos(\omega_D t) - e^{-\frac{\gamma}{2}t} \omega_D \sin(\omega_D t) \right) =$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \omega_D \underbrace{\left(\cos^2(\omega_D t) + \sin^2(\omega_D t) \right)}_{=1} =$$

$$= \underline{e^{-\gamma t} \cdot \omega_D}$$

$$\Rightarrow dc_1 = -\frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_D \cdot t)}{e^{-\gamma t} \omega_D} \cdot \frac{1}{m} \sigma \, dW_t = -e^{\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_D t) \frac{1}{m} \sigma \, dW_t$$

$$dc_2 = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_D t)}{e^{-\gamma t} \omega_D} \cdot \frac{1}{m} \sigma \, dW_t = e^{\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_D t) \frac{1}{m} \sigma \, dW_t$$

$$c_1 = -\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s} \sin(\omega_D s) \frac{1}{m\omega_D} \sigma \, dW_s$$

$$c_2 = \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s} \cdot \cos(\omega_D s) \frac{1}{m\omega_D} \sigma \, dW_s$$

$$X_p = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$= \frac{\sigma}{m\omega_D}\int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} \underbrace{\left(-\sin(\omega_D s)\cos(\omega_D t) + \cos(\omega_D s)\cdot \sin(\omega_D t)\right)}_{\text{Summensatz: } = \sin(\omega_D(t-s))} dW_s$$

$$= \frac{\sigma}{m\cdot\omega_D}\cdot\int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}\cdot \sin(\omega_D(t-s))\, dW_s$$

$$X_{ges} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{deterministisch}}}{X_h} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{stochastisch}}}{X_p}$$

$$X_{ges} = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_D t) + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\omega_D t)$$
$$+ \frac{\sigma}{m\omega_D}\int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}\cdot \sin(\omega_D(t-s))\, dW_s$$

mit $\gamma = \frac{D}{m}$ & $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

c_1 & c_2 müssen an die $\underbrace{\text{ABs}}_{x(t=0)=x_0 \;\&\; \dot{x}(t=0)=v_0}$ angepasst werden!

Begründung, warum die Var. der Konstanten bei stoch. harmon. Oszillator ohne Ito-Korrektur funktioniert:

$$x = f(c_1, c_2, t) = c_1(t)\, x_1(t) + c_2(t)\, x_2(t)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial f}{\partial c_2} dc_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2}}_{=0} \underbrace{dc_1^2}_{\to dt} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial c_2^2}}_{=0} \underbrace{dc_2^2}_{\to dt}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial c_1}}_{=\dot{x}_1} \underbrace{dt\, dc_1}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial c_2}}_{=\dot{x}_2} \underbrace{dt\, dc_2}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial c_1 \partial c_2}}_{=0} \underbrace{dc_1\, dc_2}_{\to dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \cdot \dot{x}_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_2} = x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_1 \ddot{x}_1 + c_2 \cdot \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial c_1} = \dot{x}_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial c_2} = \dot{x}_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c_1 \partial c_2} = 0$$

$$\Longrightarrow df = c_1 \frac{dx_1}{\cancel{dt}} \cancel{dt} + c_2 \frac{dx_2}{\cancel{dt}} \cancel{dt} + x_1\, dc_1 + x_2 \cdot dc_2 + \underline{\underline{0}}$$

d.h. keine Korr. durch 2. Abl.!

Lösung von $dX_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$ mittels Var. der Konst.

homogen: $dX_t = \mu \cdot dt$

$$\Rightarrow \quad X_t = \mu \cdot t + C_t$$

$\uparrow$ = stoch. Prozess

$$\Rightarrow f(t, C_t) = \mu t + C_t$$

Ito: $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial C} dC + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \underbrace{dt^2}_{\hookrightarrow 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial C^2} \underbrace{dC^2}_{\hookrightarrow dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial C} \underbrace{dt\,dC}_{\hookrightarrow 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t\, C} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial C^2} = 0$$

$$\Rightarrow df = dX_t = \mu t + dC$$

$$dX_t = \cancel{\mu t} + dC = \cancel{\mu t} + \sigma\, dW_t$$

$$dC = \sigma\, dW_t \quad \Big| \int_0^t$$

$$C_t - \underbrace{C_0}_{= X_0} = \sigma(W_t - \underbrace{W_0}_{=0}) \Rightarrow C_t = \underbrace{C_0}_{= X_0} + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow X_t = \mu \cdot t + X_0 + \sigma W_t$$

$$\underline{\underline{X_t = X_0 + \mu t + \sigma \cdot W_t}}$$

Lösung von $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma\, dW_t$ mittels Var. der Konst.

homogen: $dX_t = \mu X_t\, dt$

$$\Longrightarrow \quad X_t = C_t \cdot e^{\mu t}$$

$$f(t, c) = c \cdot e^{\mu t}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial c} dC_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \underbrace{dC_t^2}_{\to = dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial c} \underbrace{dt\, dC_t}_{\to 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\mu e^{\mu t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c\mu^2 e^{\mu t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial c} = \mu e^{\mu t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = e^{\mu t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0$$

$$\Longrightarrow (df =)\, dX_t = \cancel{\mu \cdot \underbrace{C_t e^{\mu t}}_{= X_t} dt} + e^{\mu t} dC + 0 = \cancel{\mu X_t \cdot dt} + \sigma\, dW_t$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\mu t} dC = \sigma\, dW_t$$

$$dC = \sigma \cdot e^{-\mu t} dW_t \quad \Big| \int_0^t$$

$$C_t - \underbrace{C_0}_{= X_0} = \sigma \int_0^t e^{-\mu s} dW_s \Longrightarrow C_t = X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\mu s} dW_s$$

$$X_t = C_t \cdot e^{\mu t} = e^{\mu t}\left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\mu s} dW_s\right)$$

$$\underline{\underline{X_t = X_0 \cdot e^{+\mu t} + \sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)} dW_s}}$$

Lösung von $dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dW_t$ mittels Var. der Konst.!

deterministischer Anteil: $dX_t = \mu X_t\,dt$

$$\Longrightarrow \quad X_t = C_t \cdot e^{\mu t}$$

Ito: $f(t,c) = c \cdot e^{\mu t}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial c}dc + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}\underbrace{dC_t^2}_{\to \cdot dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial c}\overbrace{dt\,dC_t}^{\to 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\mu e^{\mu t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c\mu^2 e^{\mu t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial c} = \mu e^{\mu t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = e^{\mu t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0$$

$$dX_t = \cancel{\mu \cdot \underbrace{C_t e^{\mu t}}_{= X_t} dt} + e^{\mu t} dC_t + 0 = \cancel{\mu X_t\,dt} + \sigma X_t\,dW_t$$

$$e^{\mu t} \cdot dC_t = \sigma X_t\,dW_t \quad \Big|: e^{\mu t}$$

$$dC_t = \sigma \underbrace{\frac{X_t}{e^{\mu t}}}_{= C_t} dW_t$$

$$dC_t = \sigma C_t\,dW_t$$

Def: $Y_t = \ln(C_t)$ ... „Linearisierung von $dC_t = \sigma C_t\,dW_t$"

Ito: $f(c) = \ln(c)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial c}dC_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}dC_t^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{1}{c} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = -\frac{1}{c^2}$$

$$\Longrightarrow \quad dY_t = \frac{1}{C_t}dC_t - \frac{1}{2}\frac{1}{C_t^2}dC_t^2$$

$$dY_t = \frac{1}{\cancel{C_t}}\,\sigma \cancel{C_t}\,dW_t - \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{C_t^2}}\cdot \sigma^2 \cancel{C_t^2}\,\underbrace{dW_t^2}_{=dt}$$

$$dY_t = \sigma\,dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt$$

$$d(\ln C_t) = \sigma\,dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt \quad \Big|\int_0^t$$

$$\ln C_t - \ln C_0 = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t$$

$$\ln C_t = \ln C_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t \quad \Big|\ e^{(\ldots)}$$

$$C_t = C_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$$

$$\Longrightarrow X_t = C_t \cdot e^{\mu t}$$

$$= \underbrace{C_0}_{=X_0} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} \cdot e^{\mu t}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{X_t = X_0 \cdot e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}}}$$

ODER: <u>Lösung</u> von $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ (GBM) mittels Koeff.vergleich

$$dX_t = (\mu dt + \sigma dW_t) \cdot X_t \longrightarrow dX_t \propto X_t$$

<u>Idee:</u> abgeleitet von den gewöhnlichen DGLs, wird ein Exponentialansatz versucht

$$X_t = f(t, W_t) = X_0 \cdot e^{at + bW_t}$$

<u>Ito:</u>

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W_t} dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_t^2} \underbrace{dW_t^2}_{=dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial W_t} \underbrace{dt\, dW_t}_{\to 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X_0 \cdot a \cdot e^{at + bW_t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial W_t} = X_0 \cdot b \cdot e^{at + bW_t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial W_t^2} = X_0 \cdot b^2 e^{at + bW_t}$$

$$dX_t = X_0 \cdot a \cdot e^{at + bW_t} \cdot dt + X_0 \cdot b \cdot e^{at + bW_t} \cdot dW_t + \frac{1}{2} \cdot X_0 \cdot b^2 \cdot e^{at + bW_t} \cdot dt$$

$$dX_t = a \cdot X_t + b X_t \cdot dW_t + \frac{1}{2} b^2 X_t \, dt$$

$$dX_t = \boxed{\underbrace{\left(a + \frac{1}{2} b^2\right)}_{}} X_t \cdot dt + \boxed{b} X_t \, dW_t$$

$$dX_t = \boxed{\mu} X_t \cdot dt + \boxed{\sigma} X_t \, dW_t$$

$$\mu = a + \frac{1}{2} b^2 \quad \& \quad \sigma = b$$

$$\Rightarrow a = \mu - \frac{1}{2} b^2 = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$$

$\Rightarrow$ <u>Lösung:</u> $\underline{\underline{X_t = X_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}}}$

Lösung der Bernoulli-DGL $y' = ay + by^2$

<u>Subst:</u> $u = \frac{1}{y} = y^{\overset{=1-2}{-1}} \Rightarrow y = \frac{1}{u} \wedge y^2 = \frac{1}{u^2}$

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{=u'}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u^2} u' = a \cdot \frac{1}{u} + b \frac{1}{u^2} \quad \Big| \cdot u^2$$

$$-u' = a \cdot u + b$$

$$u' = -au - b$$

$$\frac{du}{dx} = -a \cdot u - b$$

Lösung der gewöhnl. DGL als Vorprogramm für die zugehörige SDGL!

$$\int \frac{du}{-au-b} = \int dx$$

$$-\frac{1}{a} \cdot \ln(-au-b) = dx + C^*$$

$$\ln(-au-b) = \underbrace{-a \cdot x - aC^*}_{-ax + \tilde{C}}$$

$$-au - b = e^{-ax+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} \cdot e^{-ax}$$

$$u = -\frac{1}{a}\left(b + e^{-ax+\tilde{C}}\right)$$

$$u = -\frac{b}{a} \underbrace{- \frac{e^{\tilde{C}}}{a}}_{=C} \cdot e^{-ax}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-a}{b + e^{-ax+\tilde{C}}}$$

$$y = \frac{-a}{b + e^{\tilde{C}} \cdot e^{-ax}}$$

$$y = \frac{1}{-\frac{b}{a} \underbrace{- \frac{e^{\tilde{C}}}{a}}_{=C} \cdot e^{-ax}}$$

$$y = \frac{1}{-\frac{b}{a} + C \cdot e^{-ax}}$$

⊜ ✓

Ito-Lösung der stochastischen Bernoulli-Gleichung

$$dX = \left(a \cdot X_t + b X_t^2\right) dt + \sigma \cdot X_t \cdot dW_t$$ ... nichtlin. mit analytischer Lösung

Subst.: $Y_t = X_t^{-1} = \frac{1}{X_t}$ ... gleich, wie bei gewöhnlichen DGL!

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

Ito: $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} dt\, dX_t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = 0$$

$$\Longrightarrow df = 0 - \frac{1}{X_t^2}\left[\left(aX_t + bX_t^2\right) dt + \sigma X_t\, dW_t\right] + 0$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}} \frac{\cancel{2}}{X_t^3} \cdot \left[\left(aX_t + bX_t^2\right)^2 \underbrace{dt^2}_{\to 0} + 2\left(aX_t + bX_t^2\right) \sigma X_t \underbrace{dt\, dW_t}_{\to 0} + \sigma^2 X_t^2 \underbrace{dW_t^2}_{= dt}\right]$$

$$+ 0$$

$$dY_t = \left(-\underbrace{\frac{1}{X_t}}_{Y_t} a - b\right) dt - \sigma \underbrace{\frac{1}{X_t}}_{= Y_t} dW_t + \underbrace{\frac{1}{X_t}}_{= Y_t} \sigma^2 dt$$

$$dY_t = \underbrace{\left(\sigma^2 - a\right)}_{\downarrow} Y_t\, dt \underbrace{- b\, dt}_{\hat{=}\ \text{Inhomogenität}} \underbrace{- \sigma}_{\downarrow} Y_t\, dW_t$$

$$\Longrightarrow dZ = \mu \cdot Z_t \cdot dt + \beta Z_t\, dW_t$$ ... GBM

$$\Rightarrow Z_t = Z_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\beta^2}{2})t + \beta W_t}$$

mit $\mu = \sigma^2 - a \quad \beta = -\sigma$

$$\Rightarrow Z_t = Z_0 \cdot e^{(\sigma^2 - a - \frac{1}{2}\sigma^2)t - \sigma W_t}$$

$$Z_t = Z_0 \cdot e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t - \sigma W_t}$$

<u>Variation der Konstanten:</u>

$Y_t = C_t \cdot Z_t$ mit C_t = stochastischer Prozess

$$dY_t = dC_t Z_t + C_t dZ_t + \underbrace{dC_t dZ_t}_{=\text{Kovariation}} \quad \text{... Ito-Produkt-regel}$$

(Herleitung siehe Beiblatt)

Wenn C_t keinen Diffusionsanteil hat ist $dC_t dZ_t = 0$.

$$\Rightarrow (\sigma^2 - a) Y_t dt - b\,dt - \sigma Y_t dW_t =$$

$$= \underbrace{dC_t \cdot Z_0 \cdot e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t - \sigma W_t}}_{=Z_t} + C_t \cdot [(\sigma^2 - a) \cdot Z_t \cdot dt - \sigma Z_t dW_t]$$

$$\Rightarrow \cancel{C_t(\sigma^2 - a) Z_t dt} - b\,dt - \cancel{\sigma C_t Z_t dW_t} =$$

$$= dC_t \cdot Z_t + \cancel{C_t(\sigma^2 - a) Z_t dt} - \cancel{\sigma C_t Z_t dW_t}$$

$$\Rightarrow dC_t \cdot Z_t = -b\,dt$$

$$dC_t = -b \cdot Z_t^{-1} dt = -b \frac{1}{Z_0} \cdot e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t + \sigma W_t} dt$$

$$\Rightarrow C_t - C_0 = -\frac{b}{Z_0}\int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot s + \sigma dW_s}\,ds$$

$$C_t = C_0 - \frac{b}{Z_0}\int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot s + \sigma dW_s}\,ds$$

$$Y_t = C_t \cdot Z_t \quad \text{mit} \quad C_0 = Y_0 = \frac{1}{X_0}$$

$$Y_0 = C_0 \cdot Z_0$$

$$Y_0 = Y_0 \cdot Z_0 \Rightarrow Z_0 = 1$$

$$\Rightarrow Y_t = Z_t \cdot C_t =$$

$$= e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot t - \sigma W_t}\cdot\left(\frac{1}{X_0} - b\cdot\int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot s + \sigma W_s}\,ds\right)$$

$$\Rightarrow X_t = \frac{1}{Y_t}$$

$$X_t = \frac{1}{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t - \sigma W_t}\cdot\left(\frac{1}{X_0} - b\int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)s + \sigma W_s}\,ds\right)}$$

OHNE RAUSCHEN: d.h. $\sigma = 0$

$$X_t = \frac{1}{e^{-at}\cdot\left(\frac{1}{X_0} - b\cdot\int_0^t e^{as}\,ds\right)} = \frac{1}{e^{-ax}\left(\frac{1}{X_0} - \frac{b}{a}e^{at}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{X_0}e^{-ax} - \frac{b}{a}} = \frac{1}{-\frac{b}{a} + \underbrace{\frac{1}{X_0}}_{\hat{=}\, C} e^{-ax}}$$

✓ vgl. Lösung der gew. DGL!

Beiblatt: Herleitung stochastische Produktregel

X_t, Y_t ... Ito-Prozesse $\Rightarrow Z_t = X_t \cdot Y_t$

<u>Ansatzfkt:</u> $f(x,y) = x \cdot y$

<u>Taylor, d.h. Ito:</u>

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{\partial f}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dY_t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dX_t dY_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\underline{\underline{dZ_t = Y_t\, dX_t + X_t\, dY_t + 1 \cdot dX_t\, dY_t}}$$

qed.

Probe für die stochastische Bernoulli-DGL

SDGL: $dX_t = (aX_t + bX_t^2)\,dt + \sigma X_t\, dW_t$

Lösung: $X_t = \dfrac{1}{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t - \sigma W_t}\cdot\left(\frac{1}{X_0} - b\cdot\int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)s + \sigma W_s}\,ds\right)}$

Probe:

$$X_t \cdot e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot t - \sigma W_t} = \frac{1}{\frac{1}{X_0} - b\int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot s + \sigma W_s}\,ds}$$

$$\underbrace{\frac{1}{X_t}}_{Y_t}\cdot\underbrace{e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t + \sigma W_t}}_{Z_t} = \frac{1}{X_0} - \int_0^t e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)\cdot s + \sigma W_s}\,ds$$

li. S.:

$$d(Y_t\cdot Z_t) = dY_t\cdot Z_t + Y_t\cdot dZ_t + dY_t\cdot dZ_t$$

dZ_t gemäß Itô:

$$Z_t = f(t, W_t) = e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2 - a)t + \sigma W_t}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial w}\,dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\underbrace{dW_t^2}_{=dt} \quad \ldots \text{ restl. Terme} \to 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - a\right) Z_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \sigma\cdot Z_t \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = \sigma^2 Z_t$$

$$\Rightarrow dZ_t = -\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - a\right) Z_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 Z_t\,dt =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}\sigma^2 Z_t\,dt} + aZ_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t + \cancel{\frac{1}{2}\sigma^2 Z_t\,dt}$$

$$\rightarrow d(Y_t\cdot Z_t) = dY_t\cdot Z_t + Y_t\cdot(aZ_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t) + dY_t\cdot(aZ_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t) \;=$$

$$Y_t = \frac{1}{X_t} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dX_t^2 + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$dY_t = -\frac{1}{X_t^2}\,dX_t + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{X_t^3}\,dX_t^2$$

$$= (aX_t + bX_t^2)\,dt + \sigma X_t\,dW_t$$

$$dX_t^2 = (a^2X_t^2 + 2abX_t^3 + b^2X_t^4)\underbrace{dt^2}_{\to 0} + 2(aX_t + bX_t^2)\sigma X_t\underbrace{dt\,dW_t}_{\to 0} + \sigma^2X_t^2\,dW_t^2$$

$$dX_t^2 = \sigma^2X_t^2\,dW_t^2 = \sigma^2X_t^2\,dt$$

$$dY_t = -\frac{1}{X_t^2}\cdot\left[(aX_t + bX_t^2)\,dt + \sigma X_t\,dW_t\right] + \frac{1}{X_t^{3}}\cdot\sigma^2X_t^2\,dt$$

$$= \left(-a\frac{1}{X_t} - b\right)dt - \sigma\frac{1}{X_t}\,dW_t + \frac{1}{X_t}\,\sigma^2\,dt$$

$$= \left[\left(-a\frac{1}{X_t} - b + \sigma^2\frac{1}{X_t}\right)dt - \sigma\frac{1}{X_t}\,dW_t\right]Z_t + \frac{1}{X_t}(aZ_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t) +$$

$$+\underbrace{\left[\left(-a\frac{1}{X_t} - b + \sigma^2\frac{1}{X_t}\right)dt - \sigma\frac{1}{X_t}\,dW_t\right]\cdot(aZ_t\,dt + \sigma Z_t\,dW_t)}_{= -\sigma^2\frac{Z_t}{X_t}\,dW_t^2 = -\sigma^2\frac{Z_t}{X_t}\,dt,\ \text{Rest} \to 0} =$$

$$= \cancel{-a\frac{Z_t}{X_t}\,dt} - bZ_t\,dt + \cancel{\sigma^2\frac{Z_t}{X_t}\,dt} - \sigma\frac{Z_t}{X_t}\,dW_t + \cancel{a\frac{Z_t}{X_t}\,dt} + \sigma\frac{Z_t}{X_t}\,dW_t - \cancel{\sigma^2\frac{Z_t}{X_t}\,dt} =$$

$$= -b\cdot Z_t\,dt = -b\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - a\right)t + \sigma W_t}$$

r.S.: $d\left(\frac{1}{X_0} - b\int_0^t e^{-\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - a\right)\cdot s + \sigma W_s}\,ds\right) = -b\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - a\right)t + \sigma W_t}$ = ✓

Numerische Lösung von sDGL mittels Verfahren von Euler-Maruyama

Bsp.: GBM : $dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t \quad \Big| : dt$

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu \cdot X_t + \sigma X_t \underbrace{\frac{dW_t}{dt}}$$

$\nexists$, da nicht diff.bar
$\Rightarrow$ math. „unsauber"
bzw. „falsch"!

Diskretisierung:

$$\Delta X_i = \mu \cdot \underset{\text{expl.}}{X_{i-1}} \Delta t + \sigma \underset{\text{expl.}}{X_{i-1}} \Delta W_i$$

$$X_i - X_{i-1} = \mu X_i \Delta t + \sigma X_{i-1} \Delta W_i$$

$$\Longrightarrow X_i = X_{i-1} + \mu X_{i-1} \Delta t + \sigma X_{i-1} \Delta W_i$$

mit $X_0 = X(t=0)$ ($\&$ $W_0 = 0$) $\&$ $\Delta W_i \sim \underbrace{N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}}_{= N(0, \Delta t)}$

Das Integral $\int_0^t W_s \, dW_s$

$W_t \ldots$ Wiener-Prozess!
(s)

__Klassische Analysis:__ $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$

$f(t, W_t) = W_t^2$

·) __Itô:__ $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \underbrace{dW_t^2}_{= dt \ (\text{Itô})}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial W} = 2W \quad \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} = 2$

$\Rightarrow d(W_t^2) = 2 W_t dW_t + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} dt$

$2 W_t dW_t = d(W_t^2) - dt \quad |:2$

$W_t dW_t = \frac{1}{2} d(W_t^2) - \frac{1}{2} dt \quad | \int_0^t$

$\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2} \int_0^t d(W_s^2) - \frac{1}{2} \int_0^t ds$

$\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - \underbrace{W_0^2}_{=0 \text{ per Def.}}) - \frac{1}{2}(t - 0)$

$\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$

·) __Stratonovic:__ $\int_0^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2} W_s^2 \Big|_0^t = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} \underbrace{W_0^2}_{=0} = \frac{1}{2} W_t^2$

Das Verfahren von Milstein bzw. der Milstein-Term

Während das Euler-Maruyama-Verfahren nur die erste Ordnung der Taylor-Entwicklung berücksichtigt, nutzt Milstein die zweite Ordnung für den stochastischen Teil, um die Gesamtkonvergenzordnung des Verfahrens von $\frac{1}{2}$ beim EM-Verfahren auf 1 beim Milstein-Verfahren zu heben.

Betrachten wir zur Herleitung eine sDGL der Form

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

wie z.B. bei der geometrischen Brownschen Bewegung.

Zuerst integriert man die Gleichung über ein kleines Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \int_t^{t+\Delta t} a(X_s)ds + \int_t^{t+\Delta t} b(X_s)dW_s.$$

Für kleine Δt nehmen wir den Drift-Term $a(X_s)$ als konstant an, $a(X_s) \approx a(X_t)$ (linksseitig)

$$\int_t^{t+\Delta t} a(X_s)ds \approx a(X_t)\Delta t.$$

Um eine bessere Näherung für den Term $b(X_s)$ im stochastischen Integral zu erhalten, wenden wir das Ito-Lemma auf die Funktion $f(x) = b(x)$ an

$$db(X_s) = \left(a(X_s)b'(X_s) + \frac{1}{2}b^2(X_s)b''(X_s)\right)ds + b(X_s)b'(X_s)dW_s.$$

Für die Milstein-Herleitung vernachlässigen wir die Terme höherer Ordnung in ds und betrachten nur den relevanten (=stochastischen) Teil

$$b(X_s) \approx b(X_t) + \int_t^s b(X_u)b'(X_u)dW_u.$$

Wird $b(X_u)b'(X_u)$ wiederum durch den Wert zum Startzeitpunkt t angenähert, ergibt sich

$$b(X_s) \approx b(X_t) + b(X_t)b'(X_t)(W_s - W_t).$$

Setzen wir diese Näherung in das ursprüngliche stochastische Integral ein

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} b(X_s)dW_s &\approx \int_t^{t+\Delta t} \left[b(X_t) + b(X_t)b'(X_t)(W_s - W_t)\right] dW_s, && (1) \\ &= b(X_t)\Delta W_t + b(X_t)b'(X_t) \int_t^{t+\Delta t} (W_s - W_t)dW_s. && (2) \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral $\int_t^{t+\Delta t}(W_s - W_t)dW_s$ lässt sich mittels Ito-Integral exakt lösen. Das Resultat lautet $\frac{1}{2}((\Delta W_t)^2 - \Delta t)$.

Kombiniert man alle Teile, erhält man die iterative Formel für das Milstein-Verfahren

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n)\Delta t + b(X_n)\Delta W_n + \underbrace{\frac{1}{2}b(X_n)b'(X_n)((\Delta W_n)^2 - \Delta t)}_{\text{Milstein-Term}}.$$

Hier ein detaillierterer Weg für die Ermittlung der Näherung von $b(X_s)$ mittels des Lemmas von Ito:

Um den Milstein-Term zu verstehen, wenden wir das Ito-Lemma auf die Funktion $f(x) = b(x)$ an. Das Ziel ist, den Wert des Diffusionskoeffizienten $b(X_s)$ innerhalb des Integrals besser anzunähern. Hier die schrittweise Herleitung ausgehend von der sDGL

$$dX_s = a(X_s)ds + b(X_s)dW_s.$$

Wir möchten $b(X_s)$ für ein $s > t$ bestimmen. Das allgemeine Ito-Lemma für eine Funktion $f(X_s)$ lautet

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f''(X_s)dX_s^2.$$

Setzt man $f(x) = b(x)$ in das Lemma ein, erhält man unter Berücksichtigung der Ito-Regeln

$$\begin{aligned} db(X_s) &= b'(X_s)\underbrace{(a(X_s)ds + b(X_s)\,dW_s)}_{=dX_s} + \frac{1}{2}b''(X_s)\underbrace{(a^2(X_s)ds^2 + 2\,a(X_s)b(X_s)d_s\,dW_s + b^2(X_s)\,dW_s^2)}_{=dX_s^2} \quad (3) \\ &= b'(X_s)\,(a(X_s)ds + b(X_s)\,dW_s) + \frac{1}{2}b''(X_s)b^2(X_s)\,ds \quad (4) \end{aligned}$$

Hinweis: Es gelten die Ito-Regeln $dW_s^2 = ds$, bzw. $ds\,dW_s \to 0$ und $ds^2 \to 0$.

Ordnen nach ds und dW_s ergibt

$$db(X_s) = \underbrace{\left(b'(X_s)a(X_s) + \frac{1}{2}b''(X_s)b^2(X_s)\right)}_{=Lb(X_s)} ds + \underbrace{b'(X_s)b(X_s)}_{\text{relevanter Teil}}\,dW_s.$$

Um den Wert $b(X_s)$ zu erhalten, integrieren wir beide Seiten von t bis s

$$b(X_s) - b(X_t) = \int_t^s Lb(X_s)du + \int_t^s b'(X_u)b(X_u)dW_u,$$

bzw.

$$b(X_s) = b(X_t) + \int_t^s Lb(X_s)du + \int_t^s b'(X_u)b(X_u)dW_u.$$

Weiters gehen wir wie folgt vor:

1. Der Drift-Term, also das Integral $\int_t^s Lb(X_s)\,du$, ist von der Ordnung dt und wird für den Milstein-Zusatzterm vernachlässigt, da er in Terme höherer Ordnung einfließen würde. Gesucht ist jedoch eine Approximation erster Ordnung für das stochastische Integral.

2. Im stochastischen Integral nehmen wir den Integranden als konstant zum Zeitpunkt t an $b'(X_u)b(X_u) \approx b'(X_t)b(X_t)$.

Daraus ergibt sich die Näherung

$$b(X_s) \approx b(X_t) + b'(X_t)b(X_t)\int_t^s dW_u$$

$$b(X_s) \approx b(X_t) + b'(X_t)b(X_t)(W_s - W_t).$$

Dieses Ergebnis setzen wir nun in das ursprüngliche Integral der sDGL $\int_t^{t+\Delta t} b(X_s)dW_s$ ein

$$\int_t^{t+\Delta t} [b(X_t) + b'(X_t)b(X_t)(W_s - W_t)]dW_s$$

$$= b(X_t)\Delta W_t + b'(X_t)b(X_t)\int_t^{t+\Delta t}(W_s - W_t)dW_s.$$

Das hintere Integral folgt aus dem bekannten Ito-Integral $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$. Damit ist der Milstein-Term (wie oben beschrieben) fertig hergeleitet.

Zum Abschluss eine detaillierte Erklärung, warum der Term $Lb(X_s)$ bei der Milstein-Approximation vernachlässigt wird:

In der stochastischen Analysis haben die Differentiale unterschiedliche Ordnungen bezüglich der Zeitschrittweite Δt:

- dt entspricht der Ordnung Δt^1.
- dW_t entspricht der Ordnung $\Delta t^{1/2}$ (da die Varianz von W_t linear mit t wächst).

Setzt man $Lb(X_s)$ in das Integral der sDGL ein, erhält man

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_t^s Lb(X_u) du \right) dW_s.$$

Dieser Term beinhaltet ein Doppelintegral über du und dW_s. In Bezug auf die Zeit t hat dieser Ausdruck die Ordnung

$$\Delta t \cdot \Delta t^{1/2} = \Delta t^{3/2}.$$

Genau diese Ordnung ist der Grund, warum er weggelassen wird.

- Das Euler-Maruyama-Verfahren hat stochastisch die Ordnung $\Delta t^{1/2}$ bzw. deterministisch Δt^1, womit der stochastische Term die Gesamtordnung vorgibt.
- Der Milstein-Term verbessert die stochastische Approximation auf die Ordnung Δt^1. Dazu benötigt man den Term mit dW_t^2, da dieser die Ordnung Δt hat.
- Der Term $Lb(X_s)$ führt jedoch zu Termen der Ordnung $\Delta t^{3/2}$ oder höher, das ist sozusagen zu hoch für das gewünscht Ziel. Ihn mitzuführen würde bedeuten, weitere Ableitungen (b'') und komplizierte Mehrfachintegrale zu berechnen, was den Rechenaufwand enorm erhöht, ohne die angestrebte Konvergenzordnung von 1 zu verändern. $Lb(X_s)$ wandert somit in den "Fehlerterm"$O(\Delta t^{3/2})$ und wird damit vernachlässigt, um den Rechenaufwand klein zu halten.

stochastisches Lotka-Volterra-Räuber-Beute-Modell

X_t ... Beutepopulation
Y_t ... Räuberpopulation

SDGL-System:
$$dX_t = X_t(\alpha - \beta Y_t)\,dt + \sigma_1 X_t\,dW_{t1}$$
$$dY_t = Y_t(\delta X_t - \gamma)\,dt + \underbrace{\sigma_2 Y_t\,dW_{t2}}_{\text{multipl. Rauschen!}}$$

Lösung mittels $\underbrace{\text{EM-Verfahren}}_{\text{Achtung auf die Logarithmen!}}$ (siehe Datei SDGL-10)

Kapitel 2

Betrachtungen nach Stratonovich

Die GBM nach Stratonovich $dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma \cdot X_t \circ dW_t$

Strat.-Betrachtung

analytische Lösung:
$$\frac{dX_t}{dt} = \mu\,dt + \sigma\,dW_t \quad \Big| \int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \mu \int_0^t ds + \sigma \cdot \int_0^t dW_s$$

$$\ln X_t - \ln X_0 = \mu \cdot t + \sigma W_t$$

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \mu \cdot t + \sigma W_t \quad \Big| e^{(\dots)}$$

$$\frac{X_t}{X_0} \cdot e^{\mu t + \sigma W_t}$$

$$\Rightarrow X_t = X_0 \cdot e^{\mu t + \sigma W_t}$$

numerische Lösung: Da bei einer Betrachtung nach Stratonovich in der Mitte des betrachteten Intervalls Δt ausgewertet wird, wählen wir das Verfahren von Heun als Näherung.

$$X_p = X_{i-1} + \mu \cdot X_{i-1} \cdot \Delta t + \sigma \cdot X_{i-1} \cdot \Delta W_i \quad \text{(Predictor)}$$

$$X_i = X_{i-1} + \mu \cdot \frac{X_{i-1} + X_p}{2} \Delta t + \sigma \frac{X_{i-1} + X_p}{2} \cdot \Delta W_i$$

ist die Vereinfachung von:

$$X_i = X_{i-1} + \frac{1}{2}\left[\mu X_{i-1} \Delta t + \sigma X_{i-1} \Delta W_i + \mu X_p \Delta t + \sigma X_p \Delta W_i\right]$$

Die GBM nach Stratonovich mit Euler-Maruyama

Da beim Euler-Maruyama-Verfahren stets am linken Rand des Intervalls Δt ausgewertet wird, ist hier ein Korrekturterm erforderlich, damit die Stratonovich-Betrachtung berücksichtigt wird.

SDGL im Stratonovich-Sinne:

$$dX_t = \mu \cdot X_t \, dt + \sigma X_t \circ dW_t$$

$$\Rightarrow dX_t = \mu \cdot X_{t+\frac{1}{2}dt} \cdot dt + \sigma X_{t+\frac{1}{2}dt} \cdot dW_t$$

mit $X_{t+\frac{1}{2}dt} \approx X_t + \frac{1}{2} dX_t \Rightarrow$

$$dX_t = \mu \left(X_t + \tfrac{1}{2} dX_t\right) dt + \sigma \left(X_t + \tfrac{1}{2} dX_t\right) dW_t$$

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \tfrac{1}{2} \mu \, \underline{dX_t} \, dt + \sigma X_t \, dW_t + \tfrac{1}{2} \sigma \, \underline{dX_t} \, dW_t$$

$$\underline{dX_t} \approx \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t$$

$\hat{=}$ Strat. Betrachtung

$$\Rightarrow dX_t = \mu X_t dt + \tfrac{1}{2}\mu\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t\right) dt + \sigma X_t dW_t + \tfrac{1}{2}\sigma\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t\right) \cdot dW_t$$

$$dX_t = \mu X_t dt + \tfrac{1}{2}\mu^2 X_t \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \tfrac{1}{2}\mu\sigma X_t \underbrace{dW_t dt}_{\to 0} + \sigma X_t dW_t + \tfrac{1}{2}\sigma\mu X_t \underbrace{dt\, dW_t}_{\to 0} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 X_t \underbrace{dW_t^2}_{= dt}$$

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t + \tfrac{1}{2} \sigma^2 X_t \, dt$$

$$\underbrace{dX_t}_{\approx X_i - X_{i-1}} = \left(\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t$$

$$\Rightarrow \text{EM:} \quad X_i = X_{i-1} + \left(\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) X_{i-1} \cdot \Delta t + \sigma X_{i-1} \cdot \Delta W_i$$

Lösung von $dX_t = \mu\, dt + \sigma \cdot X_t \circ dW_t$ (analytisch)

⚠ Strat.-Betrachtung

homogene Gleichung: $dX_t = \sigma X_t \circ dW_t$, da der Rauschterm die höhere Ordnung bezügl. X_t hat.

$$\Longrightarrow \frac{dX_t}{X_t} = \sigma\, dW_t \quad \Big|\int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \sigma \int_0^t dW_s$$

$$\ln(X_t) - \ln(X_0) = \sigma(W_t - \underbrace{W_0}_{=0\ \text{... per Def.}})$$

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \sigma W_t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$X_t = \underbrace{X_0}_{=\text{Konst.}} \cdot e^{\sigma W_t}$$

mit C_t statt X_0

Variation der Konstanten: $X_0 \rightsquigarrow C_t$ ... hängt von der Zeit t ab

$$\Longrightarrow X_t = C_t \cdot e^{\sigma W_t}$$

$$dX_t = dC_t \cdot e^{\sigma W_t} + C_t \cdot \sigma \cdot e^{\sigma W_t} \circ dW_t = \mu dt + \sigma X_t \circ dW_t$$

$$dC_t \cdot e^{\sigma W_t} + \cancel{C_t \cdot \sigma e^{\sigma W_t} \circ dW_t} = \mu t + \cancel{\sigma \cdot C_t \cdot e^{\sigma W_t} \circ dW_t}$$

$$dC_t = \mu \cdot e^{-\sigma W_t} dt \quad \Big|\int_0^t$$

$$\int_0^t dC_s = \mu \int_0^t e^{-\sigma W_s} ds$$

$$\Longrightarrow C_t - C_0 = \mu \int_0^t e^{-\sigma W_s} ds \Rightarrow C_t = C_0 + \mu \int_0^t e^{-\sigma W_s} ds$$

$$\Rightarrow X_t = \Big(\underbrace{C_0}_{= X_0 \ldots \text{ Startwert}} + \mu \int_0^t e^{-\sigma W_s} ds\Big) \cdot e^{\sigma W_t}$$

$$X_t = X_0 \cdot e^{\sigma W_t} + \mu \int_0^t e^{\sigma(W_t - W_s)} ds$$

Numerische Lösung von $dX_t = \mu \cdot dt + \sigma X_t \circ dW_t$

Strat.

Heun: $X_p = X_{i-1} + \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot X_{i-1} \cdot \Delta W_i$ (Predictor)

$$X_i = X_{i-1} + \mu \cdot \Delta t + \sigma \frac{X_{i-1} + X_p}{2} \cdot \Delta W_i$$

Euler-Maruyama:

$$dX_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot X_{t+\frac{1}{2}dt} \cdot dW_t$$

$$X_{t+\frac{1}{2}dt} \approx X_t + \frac{1}{2} dX_t$$

$\approx \mu dt + \sigma X_t dW_t$

$$dX_t = \mu dt + \sigma \left(X_t + \frac{1}{2} dX_t \right) dW_t$$

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma \left(\mu dt + \sigma X_t dW_t \right) dW_t$$

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dW_t + \frac{1}{2} \mu \underbrace{dt\, dW_t}_{\to 0} + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t \underbrace{dW_t^2}_{= dt}$$

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dX_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma X_t dW_t$$

$$\Longrightarrow \quad X_i = X_{i-1} + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \cdot \Delta t + \sigma X_{i-1} \cdot \Delta W_i$$

Der OU-Prozess $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$ nach Strat. 11/2

Da der Rauschterm σdW_t nicht von X_t abhängt, kann man den OU-Prozess wie eine gewöhnliche DGL mittels Var. der Konstanten lösen.

homogen: $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dX_t}{\mu - X_t} = \theta\, dt \quad \Big| \int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{dX_s}{\mu - X_s} = \theta \int_0^t ds$$

$$\frac{1}{-1} \ln(\mu - X_s)\Big|_0^t = \theta t$$

$$\ln(\mu - X_t) - \ln(\mu - X_0) = -\theta t$$

$$\ln\left(\frac{\mu - X_t}{\mu - X_0}\right) = -\theta \cdot t \quad \Big| e^{(\dots)}$$

$$\frac{\mu - X_t}{\mu - X_0} = e^{-\theta t}$$

$$\mu - X_t = (\mu - X_0) e^{-\theta t}$$

$$X_t = \mu - \mu e^{-\theta t} + X_0 \cdot e^{-\theta t}$$

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})$$

besser: $X_t = \mu + \underbrace{(X_0 - \mu)}_{= C_t \text{ für die Variation der Konstanten}} \cdot e^{-\theta t}$

$$X_t = \mu + C_t \cdot e^{-\theta t}$$

$$\underline{dX_t} = \Big| \; dC_t \cdot e^{-\theta t} - C_t \cdot \theta \cdot e^{-\theta t} dt = \theta(\mu - X_t)\,dt + \sigma\, dW_t$$

$$dC_t \cdot e^{-\theta t} - C_t \cdot \theta \cdot e^{-\theta t} dt = \theta(\cancel{\mu} - \cancel{\mu} - C_t \cdot e^{-\theta t})\,dt + \sigma\, dW_t$$

$$dC_t \cdot e^{-\theta t} \cancel{- C_t \cdot \theta \cdot e^{-\theta t} dt} = \cancel{-\theta C_t \cdot e^{-\theta t} dt} + \sigma\, dW_t$$

$$dC_t = \sigma \cdot e^{\theta t}\, dW_t \;\Big|\; \int_0^t$$

$$C_t - C_0 = \sigma \cdot \int_0^t e^{\theta s}\, dW_s$$

$$C_t = C_0 + \sigma \int_0^t e^{\theta s}\, dW_s$$

$\underline{t = 0:}$ $\quad X_0 = \mu + C_0 \Rightarrow C_0 = X_0 - \mu$

$$\Longrightarrow \quad C_t = X_0 - \mu + \sigma \int_0^t e^{\theta s}\, dW_s$$

$$X_t = \mu + \left(X_0 - \mu + \sigma \cdot \int_0^t e^{\theta s}\, dW_s\right) \cdot e^{-\theta t}$$

$$X_t = \mu \cdot (X_0 - \mu) e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\, dW_s$$

bzw.

$$X_t = X_0 \cdot e^{-\theta t} \cdot \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\, dW_s$$

Ist ident mit der Ito-Lösung!

CIR-Modell $dX_t = \theta(\mu - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t$

1) Das EM-Verfahren liefert eine Näherung für Ito-Lösung

$$\underbrace{\Delta X_i}_{= X_i - X_{i-1}} = \theta(\mu - X_{i-1})\cdot\Delta t + \sigma\sqrt{X_{i-1}}\,\Delta W_i$$

$$\Rightarrow \quad X_i = X_{i-1} + \theta(\mu - X_{i-1})\Delta t + \sigma\sqrt{X_{i-1}}\,\Delta W_i$$

2) Lösung mittels Verfahren von Heun:

Aufgrund der Konstruktion des Verfahrens von Heun konvergiert dieses gegen die Lösung von Stratonovich
$\Rightarrow$ es ist ein Korrekturterm notwendig, um diese Lösung mit jener des EM-Verfahrens vergleichen zu können.

$$dX_{t+dt} = \theta(\mu - X_{t+\frac{1}{2}dt})\,dt + \sigma\sqrt{X_{t+\frac{1}{2}dt}}\,dW_t \quad \ldots \text{Stratonovich-Schnitt}$$

$$X_{t+\frac{1}{2}dt} \approx X_t + \frac{1}{2}dX_t \quad (\text{Taylor})$$

Driftterm: $\theta(\mu - X_t - \frac{1}{2}dX_t)\,dt =$

$$= \theta\left(\mu - X_t - \frac{1}{2}\left(\theta(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t\right)\right)dt =$$

$$= \theta(\mu - X_t)\,dt - \frac{1}{2}\theta^2(\mu - X_t)\underbrace{dt^2}_{\hookrightarrow 0} - \frac{1}{2}\theta\sigma\sqrt{X_t}\underbrace{dW_t\,dt}_{\hookrightarrow 0}$$

$$\doteq \theta(\mu - X_t)\,dt$$

Rauschterm: $\sigma\sqrt{X_{t+\frac{1}{2}dt}}\, dW_t = \,?$

WW: $f(X_t + \frac{1}{2}dX_t) = f(X_t) + f'(X_t)\cdot\frac{dX_t}{2}$

$f(X_t) = \sqrt{X_t} \implies f' = \frac{1}{2\sqrt{X_t}}$

$$\implies \sigma\sqrt{X_{t+\frac{1}{2}dt}}\, dW_t = \sigma\cdot\sqrt{X_t + \frac{1}{2}dX_t}\, dW_t =$$

$$= \sigma\left(\sqrt{X_t} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{X_t}}\cdot\frac{1}{2}\cdot dX_t\right) dW_t =$$

$$= \sigma\left(\sqrt{X_t} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{X_t}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\theta(\mu - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\, dW_t)\right]\right) dW_t =$$

$$= \sigma\sqrt{X_t}\, dW_t + \frac{\sigma}{4\sqrt{X_t}}\theta(\mu - X_t)\underbrace{dt\, dW_t}_{\to 0} + \frac{\sigma^2}{4\cancel{\sqrt{X_t}}}\cdot\cancel{\sqrt{X_t}}\,\underbrace{dW_t^2}_{= dt}$$

$$= \sigma\sqrt{X_t}\, dW_t + \frac{1}{4}\sigma^2 dt$$

$\implies$ komplett: $dX_t = \theta(\mu - X_t)\,dt + \underbrace{\frac{1}{4}\sigma^2 dt}_{\substack{\text{= Strat.-Korrektur,}\\ \text{damit man Strat.-}\\ \text{Lösung erhält!}}} + \sigma\sqrt{X_t}\, dW_t$

Umgekehrt: Will man mittels Heun lösen und die EM-Lösung / Ito-Lösung erzeugen, muss man genau diesen Term abziehen.

Heun für ~~Ito~~ Ito: $X_P = X_{i-1} + \left[\theta(\mu - X_{i-1}) - \frac{1}{4}\sigma^2\right]\Delta t + \sigma\sqrt{X_{i-1}}\,\Delta W_i$

$$X_i = X_{i-1} + 0{,}5\cdot\left[\theta(\mu - X_i) - \frac{1}{4}\sigma^2 + \theta(\mu - X_P) - \frac{1}{4}\sigma^2\right]\Delta t + \sigma\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{X_{i-1}} + \sqrt{X_P}\right)\Delta W_i$$

Lösung der stoch. Bernoulli-DGL mittels Verfahren von Heun/EM

SDGL: $dX_t = (a\cdot X_t + bX_t^2)dt + \sigma X_t\, dW_t$

Heun: $dX_{t+dt} = \left(aX_{t+\frac{1}{2}dt} + bX^2_{t+\frac{1}{2}dt}\right)dt + \sigma X_{t+\frac{1}{2}dt}\cdot dW_t$

mit $X_{t+\frac{1}{2}dt} \approx X_t + \frac{1}{2}dX_t$ & $f(X_t + \frac{1}{2}X_t) = f(X_t) + \frac{1}{2}f'(X_t)\cdot dX_t$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow X^2_{t+\frac{1}{2}dx} \overset{\approx}{=} X_t^2 + \frac{1}{2}\cdot 2X_t\, dX_t = X_t^2 + X_t\cdot\left[(aX_t + bX_t^2)dt + \sigma X_t\, dW_t\right]$$

$$= X_t^2 + X_t(aX_t + bX_t^2)dt + \sigma X_t^2\, dW_t$$

$$dX_{t+dt} = \left[a(X_t + \tfrac{1}{2}dX_t) + b\left(X_t^2 + X_t(aX_t + bX_t^2)dt + \sigma X_t^2\, dW_t\right)\right]\cdot dt + \sigma\left(X_t + \tfrac{1}{2}dX_t\right)\cdot dW_t$$

$$dX_{t+dt} = aX_t\,dt + a\tfrac{1}{2}(aX_t + bX_t^2)\overbrace{dt + \sigma X_t \underbrace{dW_t)dt}_{\to 0}}^{=dt^2 \to 0} +$$

$$+ b\cdot\left(X_t^2 dt + X_t(aX_t + bX_t^2)\underbrace{dt^2}_{\to 0} + \sigma X_t^2 \underbrace{dW_t\, dt}_{\to 0}\right) +$$

$$+ \sigma\left(X_t + \tfrac{1}{2}\left[(aX_t + bX_t^2)\underbrace{dt + \sigma X_t\, dW_t\right]\right) dW_t}_{=dt\,dW_t \to 0}$$

$$dX_{t+dt} = aX_t\,dt + bX_t^2\,dt + \sigma X_t\,dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot X_t\cdot \underbrace{dW_t^2}_{=dt}$$

$$dX_{t+dt} = \left(aX_t + bX_t^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 X_t}\right)dt + \sigma X_t\,dW_t$$

↳ Stratonovich-Korrektur, wenn man mit Euler-Maruyama löst!

Will man eine Itô-Lösung:

analytisch: siehe vorne

EM: $X_i = X_{i-1} + \left(aX_{i-1} + bX_{i-1}^2\right)\Delta t + \sigma X_{i-1}\Delta W_i$

Heun: $X_p = X_{i-1} + \left(aX_{i-1} + bX_{i-1}^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 X_{i-1}\right)\Delta t + \sigma X_{i-1}\Delta W_i$

$$X_i = X_{i-1} + \frac{1}{2}\left[\left(aX_{i-1} + bX_{i-1}^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 X_{i-1}\right)\Delta t + \sigma X_{i-1}\Delta W_i + \left(aX_p + bX_p^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 X_p + \sigma X_p \Delta W_i\right]\right.$$

Will man eine Stratonovich-Lösung:

analytisch: $X_t = \dfrac{1}{e^{-at-\sigma W_t}\cdot\left(\frac{1}{X_0} - b\cdot\int_0^t e^{as+\sigma W_s}\,ds\right)}$

EM: $X_i = X_{i-1} + \left(aX_{i-1} + bX_{i-1}^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 X_{i-1}\right)\Delta t + \sigma X_{i-1}\Delta W_i$

Heun: $X_p = X_{i-1} + \left(aX_{i-1} + bX_{i-1}^2\right)\Delta t + \sigma X_{i-1}\Delta W_i$

$$X_i = X_{i-1} + \frac{1}{2}\left[\left(aX_{i-1} + bX_{i-1}^2\right)\Delta t + \sigma X_{i-1}\Delta W_i + \left(aX_p + bX_p^2\right)\Delta t + \sigma X_p \Delta W_i\right]$$

Lösung der stoch. Bernoulli-DGL nach Stratonovich

$$dX_t = (aX_t + bX_t^2)\,dt + \sigma X_t\,dW_t$$

homogen: $dX_t = (aX_t + bX_t^2)\,dt$

Subst: $X_t = \frac{1}{Y_t} \implies dX_t = -\frac{1}{Y_t^2}\,dY_t$

$$\implies -\frac{1}{Y_t^2}\,dY_t = \left(a\frac{1}{Y_t} + b\frac{1}{Y_t^2}\right)dt \underbrace{\left(+\sigma\frac{1}{Y_t}\,dW_t\right)}_{\text{inhomogener Anteil}}$$

$$dY_t = (-aY_t - b)\,dt$$

$$\frac{dY_t}{aY_t+b} = -\,dt \quad \Big|\int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{dY_s}{aY_s+b} = -\int_0^t ds$$

$$\frac{1}{a}\ln(aY_t+b) = -t + C^* \quad \Big|\cdot a \Big| e^{(\ldots)}$$

$$aY_t + b = e^{-at+aC^*} \quad \Big| -b \Big| : a$$

$$Y_t = -\frac{b}{a} + \underbrace{\frac{1}{a}\cdot e^{-at}\cdot e^{aC^*}}_{=C}$$

$$Y_t = -\frac{b}{a} + C\cdot e^{-at} \quad \ldots \text{ homogene Lösung}$$

Var. der Konst:

$$Y_t = -\frac{b}{a} + C_t\cdot e^{-at}$$

$$dY_t = dC_t\cdot e^{-at} + C_t\cdot(-a)\,e^{-at}\,dt$$

$$dY_t = (-aY_t - b)\,dt - \sigma Y_t\,dW_t$$

$$\underline{dY_t} = dC_t \cdot e^{-at} - aC_t \cdot e^{-at} dt = \left(-a\left(-\frac{b}{a} + C_t \cdot e^{-at}\right) - b\right) dt - \sigma\left(-\frac{b}{a} + C_t \cdot e^{-at}\right) dW_t$$

$$dC_t \cdot e^{-at} - \cancel{aC_t e^{-at} dt} = \cancel{b dt} - \cancel{aC_t \cdot e^{-at} dt} - \cancel{b dt} + \sigma \frac{b}{a} dW_t - \sigma C_t e^{-at} \cdot dW_t$$

$$dC_t = \sigma\left(\frac{b}{a} \cdot e^{at} - C_t\right) dW_t$$

$$\underbrace{dC_t + \sigma C_t dW_t}_{} = \sigma \frac{b}{a} \cdot e^{at} dW_t$$

= homogener Teil : $dC_t + \sigma C_t dW_t = d(\varphi_t \cdot C_t)$

$$\varphi_t \cdot (dC_t + \sigma C_t dW_t) = d\varphi_t C_t + \varphi_t dC_t$$

integrierenden Faktor so, dass linke Seite zur Produktregel wird.

$$\cancel{\varphi_t dC_t} + \sigma \varphi_t \cancel{C_t} dW_t = d\varphi_t \cancel{C_t} + \cancel{\varphi_t dC_t}$$

$$\Longrightarrow d\varphi_t = \sigma \varphi_t dW_t$$

$$\frac{d\varphi_t}{\varphi_t} = \sigma dW_t \quad \xrightarrow{\int} \quad \varphi_t = e^{\sigma W_t}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{e^{\sigma W_t}\left(dC_t + \sigma C_t dW_t\right)}_{} = e^{\sigma W_t} \sigma \frac{b}{a} e^{at} dW_t$$

$$d\left(e^{\sigma W_t} \cdot C_t\right) = \sigma \frac{b}{a} e^{at + \sigma W_t} dW_t \quad \Big| \int_0^t$$

$$e^{\sigma W_t} \cdot C_t - \underbrace{e^{\sigma W_0}}_{=1} \cdot C_0 = \sigma \frac{b}{a} \int_0^t e^{as + \sigma W_s} dW_s \qquad (W_0 = 0)$$

$$\Longrightarrow C_t = C_0 \cdot e^{-\sigma W_t} + \sigma \frac{b}{a} \int_0^t e^{as - \sigma(W_t - W_s)} dW_s$$

$$\Rightarrow Y_t = -\frac{b}{a} + C_0 \cdot e^{-at-\sigma W_t} + \sigma \frac{b}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)-\sigma(W_t-W_s)}\, dW_s$$

WW: $Y_t = -\frac{b}{a} C_t \cdot e^{-at}$

$t=0$: $Y_0 = -\frac{b}{a} \cdot C_0 \cdot \underbrace{e^0}_{=1}$

$$\Longrightarrow C_0 = Y_0 + \frac{b}{a}$$

$$Y_t = -\frac{b}{a} + \Big(\underbrace{Y_0}_{=\frac{1}{X_0}} + \frac{b}{a}\Big) \cdot e^{-at-\sigma W_t} + \sigma \frac{b}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)-\sigma(W_t-W_s)}\, dW_s$$

$$X_t = \frac{1}{-\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{X_0} + \frac{b}{a}\right) e^{-at-\sigma W_t} + \sigma \frac{b}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)-\sigma(W_t-W_s)}\, dW_s}$$

⚠

Um diese Lösung mit der Ito-Lösung vergleichen zu können, wird sie weiter umgeformt:

$$\sigma \frac{b}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)-\sigma(W_t-W_s)}\, dW_s = \sigma \frac{b}{a} \cdot e^{-at-\sigma W_t} \cdot \int_0^t e^{as+\sigma W_s}\, dW_s =$$

$$= e^{-at-\sigma W_t} \cdot \int_0^t \frac{b}{a} e^{as} \cdot \sigma e^{\sigma W_s}\, dW_s$$

Faktoren für partielle Int.

WW: $d(U_t \cdot V_t) = dU_t \cdot V_t + U_t \cdot dV_t$

$$\Longrightarrow \int U_t\, dV_t = \cancel{\int d}(U_t \cdot V_t) - \int V_t\, dU_t$$

$$U_s = \frac{b}{a} e^{as}$$

$$dV_s = \sigma \cdot e^{\sigma W_s} dW_s = d\left(e^{\sigma W_s}\right)$$ Kontrolle, durch Auflösen der Klammer

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{b}{a} e^{as} d\left(\sigma e^{W_s} dW_s\right) = \frac{b}{a}\cdot e^{as} \cdot e^{\sigma W_s}\Big|_0^t - \int_0^t e^{\sigma W_s} \cdot d\left(\frac{b}{a}\cdot e^{as}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot e^{at+\sigma W_t} - \frac{b}{a}\cdot e^{a\cdot 0+\sigma W_0} \underset{=0}{\uparrow} - \int e^{\sigma W_s} \cdot \frac{b}{\cancel{a}}\cdot \cancel{a} \cdot e^{as} ds =$$

$$= \frac{b}{a} e^{at+\sigma W_t} - \frac{b}{a} - b\int_0^t e^{as+\sigma W_s} ds$$

$$\Rightarrow X_t = \frac{1}{-\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{X_0} + \frac{b}{a}\right)\cdot e^{-at-\sigma W_t} + e^{-at-\sigma W_t}\cdot\left(\frac{b}{a}\cdot e^{at+\sigma W_t} - \frac{b}{a} - b\cdot \int_0^t e^{as+\sigma W_s} ds\right)}$$

$$X_t = \frac{1}{\cancel{-\frac{b}{a}} + \frac{1}{X_0} e^{-at-\sigma t} \cancel{+\frac{b}{a} e^{-at-\sigma W_t}} \cancel{+\frac{b}{a}} \cancel{-\frac{b}{a} e^{-at-\sigma W_t}} - b\cdot e^{-at-\sigma W_t} \cdot \int_0^t e^{as+\sigma W_s} ds}$$

$$X_t = \frac{1}{e^{-at-\sigma W_t}\left(\frac{1}{X_0} - b\int_0^t e^{+as+\sigma W_s} \underline{\underline{ds}}\right)}$$ ⚠

Das ist genau die Ito-Lösung <u>ohne</u> Korrekturterme!

Umrechnung Ito ↔ Stratonovich allgem. Form

Strat: $$dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\circ dW_t$$

$$dX_{t+dt} = a\left(X_{t+\frac{1}{2}dt}, t+\tfrac{1}{2}dt\right)dt + b\left(X_{t+\frac{1}{2}dt}, t+dt\right)\cdot dW_t$$

Taylor: $$X_{t+\frac{1}{2}dt} = X_t + \frac{1}{2}dX_t$$

$$dX_t \approx a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t$$

$$a\left(X_{t+\frac{1}{2}dt}, t+\tfrac{1}{2}dt\right) = a(X_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial X_t}(X_t,t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}(X_t,t)\cdot dt + \dots$$

$$b\left(X_{t+\frac{1}{2}dt}, t+\tfrac{1}{2}dt\right) = b(X_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}(X_t,t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial t}(X_t,t)\cdot dt + \dots$$

$$dX_{t+dt} = \left[a + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial X_t}\cdot(a\,dt + b\,dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}dt\right]_{X_t,t}\cdot dt \; +$$

$$+\left[b + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}\cdot(a\cdot dt + b\,dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial t}dt\right]_{X_t,t}\cdot dW_t$$

$$= \left[a\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial X_t}\cdot a\cdot \underbrace{dt^2}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial X_t}\cdot b\,\underbrace{dW_t\,dt}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}\underbrace{dt^2}_{\to 0}\right]_{X_t,t}$$

$$+\left[b\cdot dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}a\,\underbrace{dt\,dW_t}_{\to 0} + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}b\,\underbrace{dW_t^2}_{= dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial t}\underbrace{dt\,dW_t}_{\to 0}\right]_{X_t,t}$$

$$dX_{t+dt} = \underbrace{a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\cdot dW_t}_{\text{„Ito"}} + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}(X_t,t)\cdot b(X_t,t)\cdot dt$$

d.h.: Will man eine Strat.-SDGL mittels Ito-Integration lösen, benötigt man den Korrekturterm $+\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}\cdot b\cdot dt$

Will man eine Ito-SDGL mittels Strat-Integration lösen, benötigt man den Korrekturterm $-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X_t}\cdot b\cdot dt$

Das EM-Verfahren mit Milstein-Term für eine Strat.-Lösung

GBM-SDGL: $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t \circ dW_t$

$$X_i = X_{i-1} + (\mu + \underbrace{\tfrac{1}{2}\sigma^2}_{\text{Strat.-Korrektur}}) X_{i-1}\, dt + \sigma X_{i-1} \Delta W_i + \underbrace{\tfrac{1}{2}\sigma^2 \Delta W_i^2}_{\text{Milstein-Term}}$$

Der Milsteinterm wird einfacher als bei der Ito-Lösung. Das innere Integral für $b(X_s)$ bleibt unverändert (siehe Ito-Version). Das äußere Integral, $\int W\, dW = \frac{1}{2}W^2$ (ohne $-t$), wird „klassisch" berechnet.

Die Erwartungswerte bei Ito- und Stratonovich-Betrachtung

1 Ito-Betrachtung

Bei einer Betrachtung einer sDGL nach Ito wird der Integrand stets am linken Randpunkt des Zeitintervalls ausgewertet. Für den Rauschterm der geometrischen Brownschen Bewegung $\sigma X_t dW_t$ bedeutet das als Summe dargestellt

$$\int_0^t \sigma X_t \, dW_t \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sigma X_{t_i} \underbrace{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}_{=\Delta W_i}.$$

Da der Wert X_{t_i} nur von der Historie bis zum Zeitpunkt t_i abhängt (d.h. adaptiert ist), ist er unabhängig vom zukünftigen Zuwachs des Wiener Prozesses $\Delta W_i = (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$. Der Erwartungswert des Zuwachses des Wiener-Prozesses ist (per Definition) immer Null, d.h. $E[\Delta W_i] = 0$. Da der Erwartungswert weiters ein linearer Operator ist, darf man ihn immer in eine endliche Summe ziehen, egal, ob die Variablen abhängig oder unabhängig voneinander sind, d.h.

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1} \sigma X_{t_i} \Delta W_i\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E[\sigma X_{t_i} \Delta W_i] = \sigma \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{t_i} \Delta W_i].$$

Der schwierigere Teil in der Argumentation ist, warum

$$E[X_{t_i} \Delta W_i] = E[X_{t_i}] \cdot E[\Delta W_i].$$

gilt, da diese Trennung nur bei Unabhängigkeit der Variablen funktioniert.

Bei der Ito-Interpretation nutzt man die sogenannte Nicht-Antizipation. Diese besagt im Grunde, dass der Wert des Prozesses X_{t_i} zu keinem Zeitpunkt t_i von Informationen abhängt, die erst in der Zukunft (nach t_i) eintreffen.

Für die weitere Erklärung gilt im Detail:

- Die Filtration $(\mathcal{F}_{t_i})$ ist das gesamte "Wissen"über den Prozess bis zum Zeitpunkt t_i.
- Der Wert X_{t_i} steht zum Zeitpunkt t_i bereits fest. Er ist "messbar"bezüglich $\mathcal{F}_{t_i}$ und somit für Betrachtungen in die Zukunft "fixiert".
- Der betrachtete Zuwachs des Wiener-Prozesses $\Delta W_i = (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ ist laut Definition unabhängig von allem, was vorher passiert ist (also unabhängig von der Filtration $\mathcal{F}_{t_i}$).

Mit der sogenannten Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswerts gilt somit

$$E[X_{t_i} \Delta W_i] = E[E[X_{t_i} \Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]],$$

wobei $E[X_{t_i} \Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]$ den bedingten Erwartungswert bezogen auf das Wissen bis zum Zeitpunkt t_i beschreibt.

Da X_{t_i} zum Zeitpunkt t_i bekannt ist, verhält sich X_{t_i} wie eine Konstante und darf aus dem bedingten Erwartungswert herausgezogen werden

$$E[X_{t_i} \Delta W_i] = E[X_{t_i} \cdot \underbrace{E[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}]}_{=0}].$$

Da der Wiener-Prozess sozusagen keine Erinnerung hat, ist der erwartete Zuwachs unabhängig vom vorangegangenen Verlauf immer $E[\Delta W_i \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$, es gilt somit

$$E[X_{t_i} \Delta W_i] = E[X_{t_i} \cdot 0] = 0.$$

Zusammengefasst erhält man gesamt

$$E\left[\sigma \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \Delta W_i\right] = \sigma \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{t_i}] \cdot \underbrace{E[\Delta W_i]}_{=0} = 0.$$

$\Rightarrow$ Jedes Ito-Integral eines adaptierten Prozesses ist ein Martingal und hat somit den Erwartungswert 0.

2 Stratonovich-Betrachtung

Bei einer Betrachtung nach Stratonovich wird der Integrand am Mittelpunkt ausgewertet

$$\int_0^t \sigma X_t \circ dW_t \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sigma \left(\frac{X_{t_i} + X_{t_{i+1}}}{2} \right) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Hier tritt eine Korrelation auf, da in die Berechnung von $X_{t_{i+1}}$ der Zuwachs $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ einfließt.

Man kann das Stratonovich-Integral unter Zuhilfenahme einer Taylor-Entwicklung in einen Ito-Teil und einen Stratonovich-Korrekturterm zerlegen

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma X_s \circ dW_s &= \int_0^t \sigma X_{s+\frac{1}{2}ds} dW_s \\ &= \int_0^t \sigma \left(X_s + \frac{1}{2} dX_s \right) dW_s.\end{aligned}$$

Mit $dX_s = \sigma X_s dW_s$ folgt weiters

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma X_s \circ dW_s &= \int_0^t \sigma \left(X_s + \frac{1}{2} \sigma X_s dW_s \right) dW_s \\ &= \int_0^t \sigma X_s dW_s + \int_0^t \frac{1}{2} \sigma^2 X_s \underbrace{dW_s^2}_{=dt} \\ &= \sigma \int_0^t X_s dW_s + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t X_s ds}_{\text{Strat.-Korrektur}}.\end{aligned}$$

Bildet man den Erwartungswert

$$\begin{aligned}E\left[\int_0^t \sigma X_s \circ dW_s \right] &= E\left[\sigma \int_0^t X_s dW_s + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t X_s ds \right] \\ &= \underbrace{E\left[\sigma \int_0^t X_s dW_s \right]}_{=0 \text{ nach Ito}} + \underbrace{E\left[\frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t X_s ds \right]}_{\neq 0}.\end{aligned}$$

Da X_s fast sicher ungleich 0 ist, ist der Erwartungswert des Korrekturterms ebenfalls ungleich Null. Stratonovich-Integrale sind somit keine Martingale.

ANHANG

GRUNDLAGEN DER WS-RECHNUNG

etc.

Erwartungswert (diskret)

Def: $E(X) = \sum_i p_i x_i$

Wenn $y_i = a \cdot x_i$:

$$E(Y) = \sum_i p_i y_i = \sum_i p_i \cdot a \cdot x_i = a \cdot \sum_i p_i x_i = $$
$$= a \cdot E(X)$$

Wenn $z_i = x_i + b$:

$$E(Z) = \sum_i p_i \cdot z_i = \sum_i p_i (x_i + b) = \sum_i p_i x_i + \sum_i p_i b =$$
$$= E(X) + b \cdot \underbrace{\sum_i p_i}_{=1} = E(X) + b$$

Varianz (diskret)

Def: $V(X) = \sum_i p_i (E(X) - x_i)^2$ mit $E(X) = \sum_i p_i x_i$

Wenn $y_i = a \cdot x_i$:

$$V(Y) = \sum_i p_i (E(Y) - y_i)^2 = \sum_i p_i (a \cdot E(X) - a x_i)^2 =$$
$$= \sum_i p_i a^2 (E(X) - x_i)^2 = a^2 \sum_i p_i (E(X) - x_i)^2 = a^2 V(X)$$

Wenn $z_i = x_i + b$:

$$V(Z) = \sum_i p_i (E(Z) - z_i)^2 = \sum_i p_i (E(X) + b - (x_i + b))^2 =$$
$$= \sum_i p_i (E(X) \cancel{+b} - x_i \cancel{-b})^2 = \sum_i p_i (E(X) - x_i)^2 =$$
$$= V(X)$$

Weiters gilt: 1) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Beweis: $V(X) = \sum_i p_i (E(X) - x_i)^2 = \sum_i p_i ((E(X))^2 - 2E(X) \cdot x_i + x_i^2) =$

$$= \sum_i p_i (E(X))^2 - \sum_i p_i 2E(X) x_i + \underbrace{\sum_i p_i x_i^2} =$$
$$= (E(X))^2 \cdot \underbrace{\sum_i p_i}_{=1} - 2 \cdot E(X) \cdot \underbrace{\sum_i p_i x_i}_{=E(X)} + E(X^2) =$$
$$= \underbrace{(E(X))^2 - 2(E(X))^2} + E(X^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

2) $V(X) = E((E(X) - x_i)^2)$

Beweis: $E(X) = \sum_i p_i x_i$

$$E((E(X) - x_i)^2) = \sum_i p_i (E(X) - x_i)^2) = V(X)$$

Erwartungswert für Produkte (diskret)

$X = Y \cdot Z$ ... Y, Z ... Zufallsvar.

$E(Y) = \sum_i y_i \cdot P(Y = y_i)$

$E(Z) = \sum_j z_j \cdot P(Z = z_j)$

$E(X) = E(Y \cdot Z) = \sum_i \sum_j y_i \cdot z_j \cdot \underbrace{P(Y = y_i, Z = z_j)}$

$= P(Y = y_i) \cdot P(Z = z_j)$, wenn Y & Z voneinander unabh. Zufallsvar sind.

$\Longrightarrow E(Y \cdot Z) = \sum_i \sum_j y_i \cdot z_j \cdot P(Y = y_i) \cdot P(Z = z_j)$

Trennung der Summen mögl., da y_i unabh. von j und z_j unabh. von i sind.

$E(Y \cdot Z) = \underbrace{\sum_i y_i \cdot P(Y = y_i)} \cdot \underbrace{\sum_j z_j \cdot P(Z = z_j)}$

$E(Y \cdot Z) = E(Y) \cdot E(Z)$, wenn Y & Z voneinander unabh.!

Die Kovarianz

<u>Def:</u> Die Kov. ist der Erwartungswert des Produkts der Abweichungen zweier (Zufalls-)Variablen von ihren jeweiligen Erwartungswerten.

$$Cov(X,Y) = E\big((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\big)$$

Der Verschiebungssatz

<u>Beh:</u> $Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$

<u>Bew:</u> $Cov(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) =$

Da E linear ist!

$$= E\big(X\cdot Y - E(X)\cdot Y - E(Y)\cdot X + E(X)\cdot E(Y)\big) \underset{E(\text{konst.}) = \text{konst.}}{=}$$

$$= E(X\cdot Y) - E(\underbrace{E(X)}_{=\text{konst}}\cdot Y) - E(\underbrace{E(Y)}_{=\text{konst.}}\cdot X) + E(\underbrace{E(X)\cdot E(Y)}_{=\text{konst}}) =$$

$$= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) - E(Y)\cdot E(X) + E(X)\cdot E(Y) =$$

$$= E(X\cdot Y) \underbrace{- 2E(X)E(Y) + E(X)\cdot E(Y)} =$$

$$= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

Die Kovarianz (genauer)

Def: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_i - E(Y)) \cdot p_{ij}$

mit $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

Herleitung Verschiebungssatz (genauer)

$$\underline{\underline{\mathrm{Cov}(X,Y)}} = \sum_i \sum_j \left(x_i \cdot y_j - x_i \cdot E(Y) - y_j \cdot E(X) + E(X) \cdot E(Y)\right) \cdot p_{ij} =$$

$$= \underbrace{\sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}}_{= E(X \cdot Y)} - \sum_i \sum_j x_i E(Y) \cdot p_{ij} - \sum_i \sum_j y_j \cdot E(X) \cdot p_{ij} + \sum_i \sum_j E(X) \cdot E(Y) \cdot p_{ij} =$$

$$= E(X \cdot Y) - E(Y) \cdot \underbrace{\sum_i \Big(x_i \cdot \underbrace{\sum_j p_{ij}}_{= P(X = x_i)}\Big)}_{E(X)} - E(X) \underbrace{\sum_j \Big(y_j \cdot \underbrace{\sum_i p_{ij}}_{= P(Y = y_j)}\Big)}_{E(Y)} + E(X) \cdot E(Y) \cdot \underbrace{\sum_i \sum_j p_{ij}}_{= 1} =$$

$$= E(X \cdot Y) \underbrace{- E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y)} =$$

$$= \underline{\underline{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}}$$

Beh.: Sind X & Y unabh. $\Longrightarrow Cov(X,Y) = 0$

Bew.: Wenn X & Y unabh. Zufallsvar.

$$\Longrightarrow P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

bzw. $\quad p_{ij} = p_i \cdot p_j$

$$\underline{\underline{E(X \cdot Y)}} = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i \, y_j \cdot p_i \cdot p_j =$$

$$= \sum_i x_i p_i \cdot \sum_j y_j p_j = \underline{\underline{E(X) \cdot E(Y)}}$$

VS: $\underline{\underline{Cov(X,Y)}} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn unabh.}}}{=} E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = \underline{\underline{0}}$$

bzw.:

$$X, Y \text{ unabh.} \Longleftrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Erwartungswert (kontinuierlich)

Def: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

Wenn $y = a \cdot x$:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} a x \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx =$$

2 x =

$$= a \cdot E(X)$$

Wenn $z = x + b$:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} (x+b)\, f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} b\, f(x)\, dx =$$

$$= E(X) + b \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx}_{=1} = E(X) + b$$

Varianz (kontinuierlich)

Def: $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (E(X) - x)^2 f(x)\, dx$ mit $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

Wenn $y = a \cdot x$:

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (E(Y) - y)^2 f(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a E(X) - a \cdot x)^2 f(x)\, dx =$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (E(X) - x)^2 f(x)\, dx = a^2 V(X)$$

Wenn $z = x + b$:

$$V(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} (E(Z) - z)^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} (E(X) + b - (x + b))^2 f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (E(X) \cancel{+b} - x \cancel{-b})^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (E(X) - x)^2 f(x)\, dx$$

$$= V(X)$$

Varianz (kontinuierlich)

Weiters gilt: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (E(X)-x)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left((E(X))^2 - 2E(X)x + x^2\right) f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (E(X))^2 f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} 2E(X)\,x f(x)\,dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx}_{} =$$

$$= (E(X))^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{=1} - 2E(X) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}_{=E(X)} + E(X^2) =$$

$$= \underbrace{(E(X))^2 - 2(E(X))^2}_{} + E(X^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Die Kovarianz für stetige Zufallsvariable

X, Y ... Zufallsvariable, $f_{xy}(x,y), f_x(x), f_y(y)$ ... Dichtefkten

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x \, dx \quad , \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_y \, dy = \mu_y$$

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{xy} \, dx \, dy = \mu_{xy}$$

$$\underline{\underline{Cov(X,Y)}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) \, f_{xy} \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y) \cdot f_{xy} \, dx \, dy =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \, f_{xy} \, dx \, dy}_{\mu_{xy}} - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mu_y \, f_{xy} \, dx dy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \, \mu_x \, f_{xy} \, dx dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu_x \mu_y \, f_{xy} \, dx \, dy =$$

$$= \mu_{xy} - \mu_y \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy} \, dy}_{= f_x} \, dx} - \mu_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy} \, dx}_{= f_y} \, dy} + \mu_x \mu_y \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy} \, dx dy}_{=1} =$$

$$= \mu_{xy} \underbrace{- \mu_y \cdot \mu_x - \mu_x \cdot \mu_y + \mu_x \mu_y} =$$

$$= \underline{\underline{\mu_{xy} - \mu_x \cdot \mu_y}} \quad \text{... Verschiebungssatz}$$

Wenn $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow V(X^2) = 2 \cdot \sigma^4$

$$V(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - E(X^2))^2 \cdot f(x)\, dx \quad \text{mit } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\mu = 0$:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

partielle Integration

$$V(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - \sigma^2)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 - 2x^2\sigma^2 + \sigma^4) \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx - 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx + \sigma^4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx \right) =$$

$$= 3\sigma^4 - 2\sigma^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^4 = \underline{\underline{2 \cdot \sigma^4}}$$

Taylor 2D

$$q = q(x,y) \quad \& \quad p = p(x,y)\,, \quad x_0 = 0\,, \; y_0 = 0$$

$$p = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = b + 2dx + fy$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = c + 2ey + fx$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2d$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2e$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= f \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} &= f \end{aligned}\right\} \text{müssen gleich sein}$$

$$p(0,0) = a = q(0,0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,0) = b = \frac{\partial q}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(0,0) = c = \frac{\partial q}{\partial y}(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(0,0) = 2d = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(0,0) \Rightarrow d = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(0,0) = 2e = \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(0,0) \Rightarrow e = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}(0,0) = f = \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x}$$

$$\Rightarrow p(x,y) = q(0,0) + \frac{\partial q}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial q}{\partial y}(0,0)\, y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} x \cdot y$$