analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung für die Randbedingungen $u(0,t)=0$ & $u(l,t)=0$

u ... physikalische Bedeutung Temperatur

PDGL: $\dot{u} = a \cdot u''$ mit $u = u(x,t)$

Ansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\Rightarrow \quad \dot{u} = X \cdot \dot{T}$$
$$u'' = X'' \cdot T$$

$$\Rightarrow \quad X \cdot \dot{T} = a \cdot X'' \cdot T$$

$$\frac{\dot{T}}{a \cdot T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \text{ ... Separationskonst.}$$

$\Rightarrow$ Ortsglg: $X'' + \lambda X = 0$

Zeitglg: $\dot{T} + \lambda a T = 0$

Ansatz Ortsglg: $X = C_1 \cdot \cos(kx) + C_2 \cdot \sin(k \cdot x)$

$$\Rightarrow X'' = -C_1 \cdot k^2 \cos(kx) - C_2 k^2 \sin(kx)$$

$$(\lambda - k^2) \cdot (C_1 \cos(kx) + C_2 \cdot \sin(kx)) = 0 \quad \underline{\underline{\forall x!}}$$

$\Rightarrow \lambda = k^2$ bzw. für $\lambda > 0$ $k = \pm \sqrt{\lambda}$

RB: $\underline{x=0} \Rightarrow X = C_1 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\underline{x = l} \Rightarrow X = C_2 \cdot \sin(k \cdot l) = 0 = \sin(n \cdot \pi)$, $n = 1,2,3,\ldots$

beliebig $\Rightarrow C_1 = 1$

$$\Rightarrow k \cdot l = n \cdot \pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Lösung O-Glg: $\underline{\underline{X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)}}$, $n = 1,2,3,\ldots$

Lösung Zeitglg: $\dot{T}_n + a k_n^2 T_n = 0$ mit $k_n = \frac{n\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{dT_n}{dt} = -a k_n^2 T_n$$

$$\frac{dT_n}{T_n} = -a k_n^2 \cdot dt \quad \Big| \int$$

$$\ln T_n = -a k_n^2 t + \tilde{C}_n \quad \Big| \, e^{(\ldots)}$$

$$T_n = e^{-a k_n^2 t + \tilde{C}_n}$$

$$T_n = \underbrace{e^{\tilde{C}_n}}_{= C_n} \cdot e^{-a k_n^2 t}$$

$$\underline{\underline{T_n = C_n \cdot e^{-a k_n^2 t}}}$$

Lösung gesamt: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot e^{-a k_n^2 t}$

mit $k_n = \frac{n\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Bestimmung der C_n aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$:

$t = 0$: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = f(x) \quad \Big| \cdot \sin(k_m \cdot x)$

⚠

$$f(x) \cdot \sin(k_m \cdot x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot \sin(k_m \cdot x) \quad \Big| \int_0^\ell \ldots dx$$

$$\int_0^\ell f(x) \cdot \sin(k_m \cdot x)\, dx = \int_0^\ell \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot \sin(k_m \cdot x)\, dx$$

$$\int_0^\ell f(x) \cdot \sin(k_m \cdot x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \underbrace{\int_0^\ell \sin(k_n x) \cdot \sin(k_m \cdot x)\, dx}_{\text{siehe Beiblatt}}$$

laut Beiblatt:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}\cdot x\right)\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l}\cdot x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m \neq n \\ \frac{l}{2}, & \text{wenn } m = n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_0^l f(x)\cdot \sin(\underbrace{k_m}_{=k_n}\cdot x)\, dx = C_n \cdot \frac{l}{2}$$

$\sum$ ist weg, da von dieser nur ein Term übrig bleibt $(m=n)$!

$$\Longrightarrow \underline{\underline{C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot \sin(k_n\cdot x)\, dx}}$$

Gesamtlösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot \sin(k_n\cdot x)\, dx}_{=C_n} \cdot \sin(k_n\cdot x)\cdot e^{-ak_n^2 t}$$

mit $k_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1,2,3,\ldots$

Diskretisierung der analytischen Lösung:

N_x ... Anzahl der Abschnitte des Stabes

$\Rightarrow N_x+1$ Knoten: $0, 1, 2, \ldots N_x$ Index i in der Datei

$$x_i = i \cdot \Delta x = i\,\frac{\ell}{N_x} \Rightarrow f(x_i) = f_i = f(i\cdot\Delta x)$$

$$\underline{\underline{C_n}} = \frac{2}{\ell}\cdot\int_0^\ell f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\cdot x\right)dx =$$

$$\approx \frac{2}{\cancel{\ell}}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N_x-1}}_{\substack{\text{wegen RB}\\ u(0,t)=0\ \&\ u(\ell,t)=0}} f(i\cdot\Delta x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\cancel{\ell}}\cdot\underbrace{i\underbrace{\frac{\ell}{N_x}}_{=\Delta x}}_{=x_i}\right)\cdot\frac{\cancel{\ell}}{N_x} =$$

$$\underline{\underline{= \frac{2}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x-1} f(i\cdot\Delta x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi i}{N_x}\right)}}$$

Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen konstanten Randbedingungen

Die inhomogenen konstanten Randbedingungen lauten $u(0,t) = T_A$ und $u(L,t) = T_B$.

1 Warum funktioniert der Separationsansatz nur bei homogenen Randbedingungen?

Der Separationsansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ führt mathematisch dazu, dass jede einzelne Mode (also jeder Term der Summe) die Randbedingungen für sich allein erfüllen muss. Die Gesamtlösung setzt sich aus einer Summe (un)endlich vieler Teillösungen zusammen (Fouriersynthese). Am Rand gilt somit...

- $\ldots 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$, bei homogenen Randbedingungen.
- $\ldots T_A + T_A + T_A + \cdots \neq T_A$, bei inhomogenen Randbedingungen, was somit nicht funktioniert.

Darüber hinaus gilt folgendes: Damit das Produkt $X(x) \cdot T(t)$ an einem Rand (z.B. $x = 0$) einen Wert ungleich Null ergibt (z.B. T_A am linken Rand), müsste dieser Wert zu jedem Zeitpunkt t exakt gleich bleiben. Da $T(t)$ aber eine abklingende Exponentialfunktion $e^{-ak_n^2 t}$ ist, würde sich der Randwert ständig ändern. Nur Null bleibt beim Multiplizieren mit $T(t)$ immer Null.

Der Separationsansatz verlangt somit, dass die zeitliche Entwicklung am Rand mit dem räumlichen Teil "harmoniert". Das ist bei konstanten Werten $\neq 0$ nur möglich, wenn man sie vorher in den stationären Teil $v(x)$ auslagert.

2 Wie ist die Vorgangsweise bei inhomogenen Randbedingungen?

Da der Separationsansatz direkt nur für homogene Bedingungen $u(0,t) = 0$ und $u(L,t) = 0$ funktioniert, zerlegt man die Lösung $u(x,t)$ in einen stationären $v(x)$ und einen transienten Anteil $w(x,t)$

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t).$$

2.1 Der stationäre Teil $v(x)$ (= eingeschwungener Zustand)

Nach langer Zeit ($t \to \infty$) verändert sich die Temperatur nicht mehr. Da die Wärmeleitungsgleichung dann zu $v''(x) = 0$ wird, ist die Lösung eine Gerade zwischen den beiden Randwert-Temperaturen.

$$v(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{L} \cdot x$$

2.2 Der transiente Teil $w(x,t)$

Diesen Teil löst man mit dem klassischen Separationsansatz, da für w die Randbedingungen homogen sind

$$\begin{aligned} w(0,t) &= u(0,t) - v(0) = T_A - T_A = 0 \\ w(L,t) &= u(L,t) - v(L) = T_B - T_B = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Wichtig: Bei der Anfangsbedingung für $w(x,0)$ muss man den stationären Teil abziehen: $w(x,0) = u(x,0) - v(x)$.

Konkret geht man wie folgt vor:

Um die Anfangsbedingung für den transienten Teil $w(x,0)$ zu bestimmen, nutzt man die ursprüngliche Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$, diese wird mit $f(x)$ bezeichnet.

Aus $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ folgt

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = \underbrace{f(x) - \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{L} \cdot x\right)}_{=g(x)}.$$

Das Problem $w(x,t)$ hat nun homogene Randbedingungen (0 an beiden Enden) und die neue Anfangsbedingung $w(x,0) = g(x)$. Die Lösung von $w(x,t)$ erfolgt wie über die Fourier-Reihe

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t},$$

wobei die Koeffizienten C_n durch das Integral über die transformierte Anfangsbedingung berechnet werden

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Am Ende setzt man die beiden Teillösungen (homogen und inhomogen) wieder zur Gesamtlösung zusammen: $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$.