analytische Lösung der Wellengl. für eine eingespannte Saite

$\ddot{u} = c^2 \cdot u''$ mit $u(0,t) = 0$ & $u(l,0) = 0$

Separationsansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u} = X(x) \cdot \ddot{T}(t)$$

$$u'' = X''(x) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(x) \cdot \ddot{T}(t) = c^2 \cdot X''(x) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

, da li. S. nur von t und re. S. nur von x abh.

damit bei Umformung $+\lambda \cdot \ldots$ steht

$$\Rightarrow \quad X'' + \lambda X = 0 \quad \ldots \text{Ortsgl.}$$

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0 \ldots \text{Zeitgl.}$$

Ansatz Ortsgl.: $X = C_1 \cdot \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$

$$X'' = -C_1 k^2 \cos(kx) - C_2 k^2 \sin(kx)$$

$$\Rightarrow -C_1 k^2 \cos(kx) - C_2 k^2 \sin(kx) + \lambda C_1 \cos(kx) + \lambda C_2 \sin(kx) = 0$$

$$(\lambda - k^2) C_1 \cdot \cos(kx) + (\lambda - k^2) C_2 \cdot \sin(kx) = 0$$

$\forall x = 0: \Rightarrow \lambda - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\lambda}$ für $\lambda > 0$ bzw. $\lambda = k^2$

RB: $X(0) = 0$: $X = 0 = C_1 \cdot \underbrace{\cos(k \cdot 0)}_{=1} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(k \cdot 0)}_{=0} \Rightarrow C_1 = 0$

beliebig, setze $C_2 = 1$

$X(l) = 0$: $X = 0 = C_2 \cdot \sin(\underline{k \cdot l}) = \sin(\underline{n \cdot \pi})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \quad k \cdot l = n \cdot \pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lösung der Ortsglg: $X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\cdot x\right)$, $n = 1,2,3,\ldots$

Ansatz Zeitglg: $T = A\cdot\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$$\ddot{T} = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$$

$$\Longrightarrow -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) + \underbrace{k_n^2}_{=\lambda}\cdot c^2\cdot A\cos(\omega t) + k_n^2 c^2\sin(\omega t) = 0$$

$$(k_n^2c^2 - \omega^2)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = 0 \quad \ldots \forall t$$

$$\Longrightarrow \omega_n = (\pm)\sqrt{k_n^2c^2} = k_n c = \frac{n\pi}{\ell}\cdot c \quad, n = 1,2,3,\ldots$$

$$T_n = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\cdot\sin(\omega_n t)$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right)\cdot\sin(k_n\cdot x) \quad \text{mit } k = \frac{n\pi}{\ell},\ \omega_n = c\cdot k_n}$$

Die Koeff. A_n & B_n müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden:

ABs: $u(x,0) = f(x)$

$$\dot{u}(x,0) = g(x)$$

$t=0$: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\underbrace{\cos(\omega_n\cdot 0)}_{=1} + B_n\underbrace{\sin(\omega_n\cdot 0)}_{=0}\right)\cdot\sin(k_n\cdot x)$

$$\Longrightarrow u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\sin(k_n\cdot x) = f(x)$$

Zum Auflösen nach den A_n:

$f(x)$ nochmal angeschrieben mit m statt n!

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(k_m \cdot x) \quad \Big| \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

$$f(x) \cdot \sin(k_n \cdot x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(k_m \cdot x) \cdot \sin(k_n \cdot x) \quad \Big| \int_0^l \ldots dx$$

$$\int_0^l f(x) \cdot \sin(k_n x)\, dx = \int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(k_m x) \cdot \sin(k_n x)\, dx \quad \text{mit}$$

erlaubt! sind alles Konstanten

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad k_m = \frac{m\pi}{l}$$

$$\int_0^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \underbrace{\int_0^l \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx}$$

$= 0$ für $m \neq n$
$= \frac{l}{2}$ für $m = n$ } siehe Beiblatt!

$\Longrightarrow$ von der unendl. Σ bleibt nur ein einziger Term übrig, nämlich $m = n$, also der Term für $A_m = A_n$

$$\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = A_n \cdot \frac{l}{2}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) dx}}$$

analoge Vorgangsweise für die B_n:

$$\dot{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)\right) \cdot \sin(k_n x)$$

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \omega_n \underbrace{\sin(\omega_n \cdot 0)}_{=0} + B_n \omega_n \cdot \underbrace{\cos(\omega_n \cdot 0)}_{=1}\right) \cdot \sin(k_n x) = g(x)$$

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cdot \sin(k_n x) = g(x)$$

$$\overset{\text{analog}}{\Longrightarrow} \int_0^{\ell} g(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \cdot x\right) dx = B_n \cdot \omega_n \cdot \frac{\cancel{\ell}}{2} \quad \text{mit} \quad \omega_n = \underbrace{\frac{n\pi}{\cancel{\ell}}}_{=k_n} \cdot c$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx$$

Beiblatt:

Beh: $\int_0^l \sin\Big(\underbrace{\frac{m\pi}{l}x}_{=\alpha}\Big)\cdot\sin\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{l}x}_{=\beta}\Big)\,dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & \text{wenn } m=n \\ 0, & \text{wenn } m\neq n \end{cases}$

Bew: NR: $\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$ ... trig. Summensatz

$$\int_0^t \sin\Big(\frac{m\pi}{l}\cdot x\Big)\cdot\sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\Big(\cos\Big(\underbrace{\frac{m\pi}{l}x-\frac{n\pi}{l}x}_{=(m-n)\frac{\pi}{l}x}\Big)-\cos\Big(\underbrace{\frac{m\pi}{l}x+\frac{n\pi}{l}x}_{=(m+n)\frac{\pi}{l}x}\Big)\Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{l}{(m-n)\cdot\pi}\sin\Big((m-n)\frac{\pi}{l}x\Big)-\frac{l}{(m+n)\cdot\pi}\sin\Big((m+n)\frac{\pi}{l}x\Big)\Big)\Big|_0^l \ominus$$

↯

1. $m\neq n$:

$$\ominus\ \frac{1}{2}\Big(\frac{l}{(m-l)\pi}\cdot\sin\Big((m-n)\frac{\pi}{\cancel{l}}\cdot\cancel{l}\Big)-\frac{l}{(m+n)\pi}\cdot\sin\Big((m+n)\frac{\pi}{\cancel{l}}\cdot\cancel{l}\Big)\Big)-0 = 0,$$

da $m,n\in\mathbb{N} \Rightarrow m\pm n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \sin(k\cdot\pi)=0\ \forall k\in\mathbb{Z}$

2. $m=n$: $\Rightarrow m-n=0$ ... Problem, da Div. durch 0!

Abhilfe: $\to \int_0^l \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos(0)}_{=1}-\cos\Big((m+n)\frac{\pi}{l}x\Big)dx =$

$$= \frac{1}{2}\Big(x-\underbrace{\frac{l}{(m+n)\pi}\cdot\sin\Big((m+n)\frac{\pi}{l}x\Big)}\Big)\Big|_0^l = \frac{1}{2}(l-0-0+0) = \frac{l}{2}$$

wird an der OG $\wedge$ an der UG zu 0! (siehe oben)

Diskretisierung der analytischen Lösung, damit ein Vergleich mit einer numerischen Lösung mögl. ist:

Annahme: N ... Anzahl der Abschnitte der Saite

$\Rightarrow N+1$ ... Anzahl der Knoten

Index $j = \underbrace{0, 1, \dots, N}_{\# = N+1}$

$$x_j = j \cdot \Delta x = j \cdot \frac{\ell}{N}$$

Abkürzung: $f_j = f(x_j)$ & $g_j = g(x_j)$

$$A_n \approx \frac{2}{\cancel{\ell}} \sum_{j=0}^{N} f_j \sin\Big(\frac{n\pi}{\cancel{\ell}} \underbrace{\frac{\ell}{N} \cdot j}_{= x_j}\Big) \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\ell}}{N}}_{= \Delta x} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N} f_j \cdot \sin\Big(\frac{n\pi}{N} j\Big)$$

$$B_n \approx \frac{2}{n\pi c} \sum_{j=0}^{N} g_j \cdot \sin\Big(\frac{n\pi}{\cancel{\ell}} \cdot \frac{\cancel{\ell}}{N} j\Big) \cdot \frac{\ell}{N} = \underbrace{\frac{2\ell}{n\pi c N}}_{= \frac{2}{N \cdot \omega_n}} \cdot \sum_{j=0}^{N} g_j \cdot \sin\Big(\frac{n\pi}{N} \cdot j\Big)$$

Bemerkung: Bei A_n & B_n wäre $\sum_{j=1}^{N-1}$ ausreichend, da bei $j=0$ & $j=N$ die Saite eingespannt ist. D.h. $f(x_0) = f(x_N) = 0$ & $g(x_0) = g(x_N) = 0$!